# Anleitung zum Linearzeichnen,

## mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und technischen Zeichnens,

als Lehrmittel für Lehrer und Schüler

an den verschiedenen gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium,

von

**Professor G. Delabar,**

Conrector der Kantonsschule und Vorstand der Fortbildungsschule in St. Gallen.

In drei Theilen.

Zweiter Theil:

# Das projektive Zeichnen oder die darstellende Geometrie.

## Erste Abtheilung: Die Elemente der darstellenden Geometrie.

Freiburg im Breisgau.

Herder'sche Verlagshandlung.

# Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart,

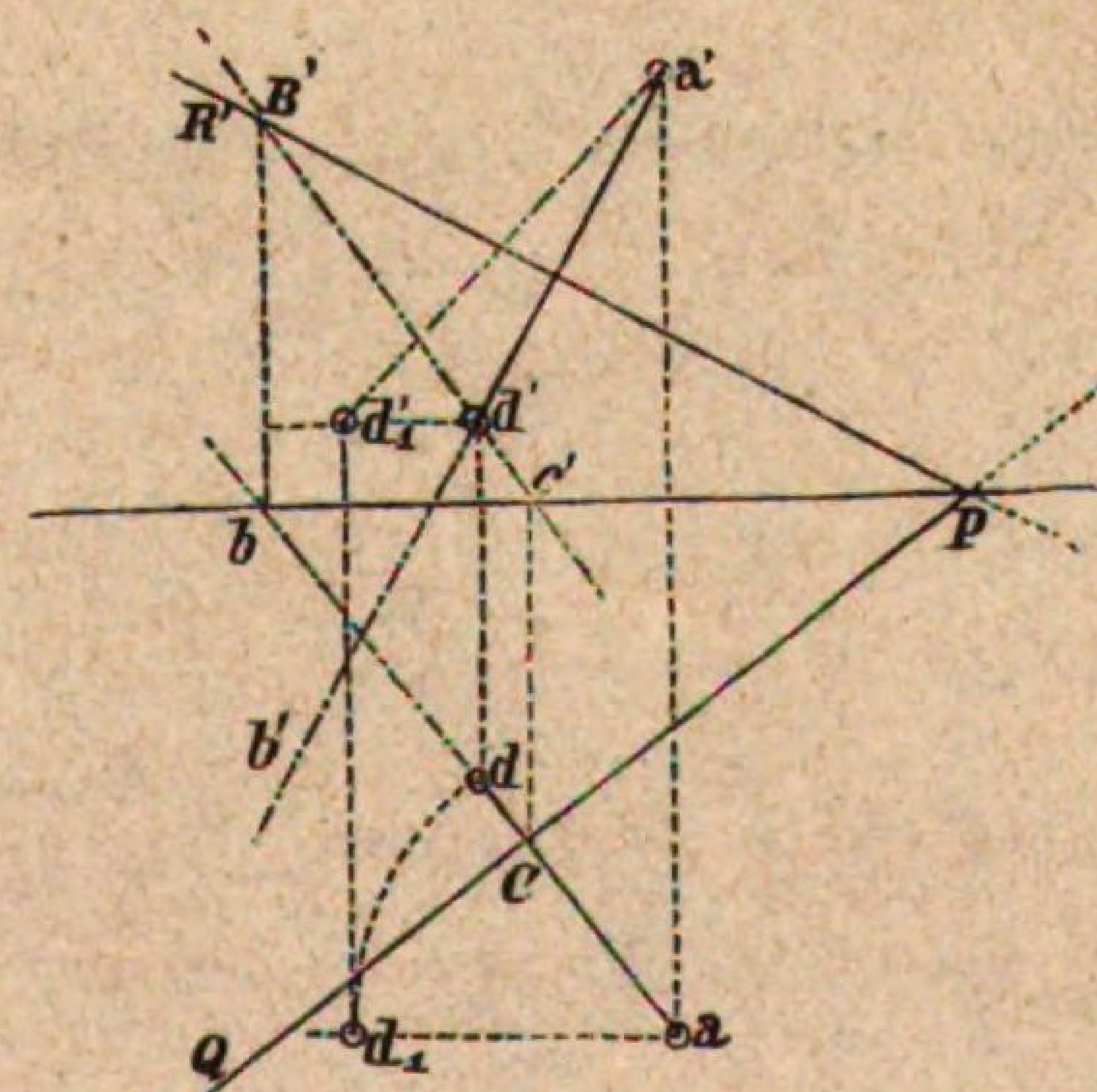
als

## Lehrmittel für Lehrer und Schüler

an Oberrealschulen, Industrie- und Gewerbschulen und andern mittlern und höhern gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium,

von

G. Delabar.




Mit 125 Figuren auf 28 lithographirten Zeichnungstafeln.

Freiburg im Breisgau.
Herder'sche Verlagshandlung.
1867.

Buchdruckerei der Herder'schen Verlagshandlung in Freiburg.

# Vorwort.

Das hier folgende dritte Heft bildet die zweite Abtheilung des zweiten Theiles unserer „Anleitung“ und ist als solche der weiteren Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart gewidmet, wie sie für alle diejenigen nöthig ist, welche sich für ein höheres technisches oder gewerbliches Fach vorzubereiten haben, also vor Allem für die Schüler an den mittlern und höhern technischen Lehranstalten, an den Oberrealschulen, an den Industrie- und Gewerbschulen, sowie namentlich auch für die Schüler an den technischen oder gewerblichen Abtheilungen der schweizerischen Kantonsschulen und an dem Vorkurs des eidgenössischen Polytechnikums.

Um jedoch den Schüler nicht zu überladen, wurden aus dem weiten und reichen Gebiet der darstellenden Geometrie nur diejenigen Lehrsätze und Aufgaben mitaufgenommen, welche für jene Vorbereitung unerläßlich sind. Indessen ist die Auswahl doch so getroffen, daß es dem Schüler, welcher diese Sammlung unter der Leitung eines tüchtigen Lehrers durchgemacht und zum völligen Verständniß gebracht hat, nicht schwer fallen sollte, auch andere ähnliche oder verwandte Kon-

struktionen, die hier nicht besonders behandelt sind, zu verstehen und selbstständig auszuführen.

Bezüglich der Benützung dieses Lehrmittels gilt dasselbe, was in dieser Hinsicht in den beiden ersten Heften und zumal in der Vorrede und Einleitung zum ersten Heft gesagt worden ist, worauf wir die Abnehmer dieses Heftes verweisen möchten.

Indem wir nun auch dieses dritte Heft der Oeffentlichkeit übergeben, wünschen wir nur, daß es dieselbe gute Aufnahme wie seine beiden Vorgänger finden möge!

St. Gallen im April 1867.

**Der Verfasser.**

# Zweiter Theil.

## Das projektive Zeichnen oder die darstellende Geometrie.

---

### Zweite Abtheilung.

### Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart.

# Einleitung.

**1.** In der ersten Abtheilung des projektiven Zeichnens war es unsere Aufgabe, den Schüler in die neue Lehre der darstellenden Geometrie einzuführen und ihn soweit mit derselben vertraut zu machen, daß er im Stande sei, die verschiedenen räumlichen Gebilde nach der orthogonalen Projektionsart graphisch darzustellen.

**2.** Nachdem wir nun diesen Zweck durch die vorausgeschickten „Elemente der darstellenden Geometrie" glauben erreicht zu haben, schreiten wir zur zweiten Abtheilung oder zweiten Stufe, auf welcher wir uns mit den schwierigern Konstruktionen, Lehrsätzen und Aufgaben und der weitern Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart überhaupt zu beschäftigen haben werden.

**3.** Hiebei werden wir in einem ersten Abschnitt alle diejenigen Lehrsätze und Aufgaben zusammenstellen, welche bei den Konstruktionen der folgenden Abschnitte ihre Anwendung finden und für diese überhaupt als erweiterte solide Grundlage zu betrachten sind. In einem zweiten Abschnitt werden wir alsdann die Durchschnittskonstruktionen der Körper mit Ebenen, nebst ihren Entwickelungen, in einem dritten ebenso die Konstruktionen der Tangenten an krumme Linien und der Tangirungsebenen an krumme Flächen, und in einem vierten die Durchschnittskonstruktionen der verschiedenen Körperformen unter sich behandeln. Und endlich sollen dann auch noch in einem fünften Abschnitt diese Lehren auf verschiedene praktische Beispiele, wie z. B. auf Dachzerlegungen, Rohrentwickelungen, Gewölbekonstruktionen u. s. w. angewendet werden.

## I.

## Lehrsätze und Aufgaben über die rechtwinkligen Projektionen der Geraden und Ebenen im Raume.

(Fig. 1—33, Blatt 1—4 im II. Heft des proj. Z.)

**4.** Dahin zählen wir die Lehrsätze und Aufgaben, welche sich auf die Spuren oder Durchschnittspunkte der Geraden mit den Projektionsebenen und andern beliebig schiefen Ebenen im Raume, auf die Durch-

schnitte zweier beliebig schiefen Ebenen im Raume, auf die parallele Lage und die kürzeste Entfernung zweier Geraden oder zweier Ebenen im Raume und den Winkel zweier Geraden oder zweier Ebenen im Raume, sowie auf die Winkel an der dreikantigen Ecke ꝛc. beziehen. Diese verschiedenen Aufgaben sollen nun nacheinander einzeln betrachtet werden.

5. Aufgabe. Es sind die rechtwinkligen Projektionen einer Geraden im Raume gegeben; man soll die Projektionen ihrer Spuren oder Durchschnittspunkte mit den Projektionsebenen bestimmen, Fig. 1—3.

Auflösung. Es seien die Projektionen Ab, a′B′ ihrer Richtung nach gegeben. Verlängere dieselbe bis zur Achse und errichte in den Durchschnittspunkten a′ und b Senkrechte auf dieselbe, so sind A und B′ die verlangten Spuren oder Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden mit den Projektionsebenen und zwar A jene mit der Horizontalebene (H. E.) und B′ jene mit der Vertikalebene (V. E.). Denn nach Früherm (II. 1, §. 36, 5) fällt die Projektion eines jeden Punktes, der in einer Projektionsebene (P. E.) selbst liegt, in die Achse. a′ und b sind deßhalb die Projektionen der gesuchten Spuren A und B′.

6. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe bleibt sich gleich, wie auch die Lage der Projektionen der Geraden gegeben sei. Man merke sich daher insbesondere die dreierlei Lagen, wie sie in Fig. 1, 2 und 3 dargestellt sind und wie sie auch am meisten vorkommen. Bei Fig. 1 hat die Gerade im Raume eine solche Lage, daß von ihr der vordere Theil der H. E. und der obere Theil der V. E., in Fig. 2 eine solche, daß von ihr der vordere Theil der H. E. und der untere Theil der V. E., und in Fig. 3 eine solche, daß von ihr der hintere Theil der H. E. und der obere Theil der V. E. geschnitten wird.

7. Die Projektionen des sichtbaren Stückes der Geraden sind in diesen Figuren entsprechend ausgezogen und die der unsichtbaren Theile derselben punktirt und die Konstruktions- oder Hülfslinien gestrichelt, wie dieß früher (II. 1, §. 26) festgesetzt worden ist. Dieselben Regeln werden auch im Folgenden eingehalten werden.

8. Aufgabe. Es sind die Spuren oder Durchschnittspunkte einer Geraden mit den P. E. gegeben; man soll die Projektionen der zugehörigen Geraden im Raume finden, Fig. 4.

Auflösung. Es sei A die horizontale und B′ die vertikale Spur. Fälle von A und B′ Senkrechte auf die Achse, welche diese in a′ und b durchschneiden, und ziehe Ab und a′B′, so sind dieß die verlangten Projektionen der gedachten Geraden im Raume. Die Richtigkeit auch dieser Auflösung beruht auf dem oben (§. 5) erwähnten Grundsatz, wornach die Projektion eines jeden Punktes, der in einer P. E. liegt, in die Achse fällt.

Da die Projektionen der Geraden in dieser Auf-

gabe nicht gegeben, sondern gesucht wurden, so sind sie nach Früherm (II. 1, §. 26) stark ausgezogen worden. Dieselbe Regel wird auch im Folgenden beobachtet werden. Ebenso werden wir hinsichtlich der Bezeichnung der Punkte die in jenem §. erwähnten Regeln auch im Folgenden beibehalten.

**9. Lehrsatz.** Wenn eine Gerade in einer Ebene liegt, so fallen die Spuren der erstern in die Risse der letztern, und umgekehrt, wenn in einer solchen Zeichnung die Spuren einer Geraden in den Rissen einer Ebene liegen, so liegt die Gerade selbst ganz in der Ebene.

Denn sind z. B. in Fig. 5 (A b, a′b′) die Projektionen einer Geraden, (P Q, P R′) die Risse einer Ebene und A und B′ die Spuren der erstern, die in den gleichnamigen Rissen der letztern liegen, so liegt die Gerade, da sie mit der Ebene die beiden Punkte A und B′ gemein hat, nach einem bekannten Satze der Geometrie ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene.

**10. Aufgabe.** Es sind die Risse einer Ebene und die Spuren einer Geraden in derselben gegeben; man soll die Projektionen der Geraden selbst finden, Fig. 5.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse einer Ebene und A und B′ in denselben die Spuren einer Geraden. Fälle von A und B′, wie in Fig. 4, Perpendikel zur Achse und ziehe A b, a′B′, so sind dieß die verlangten Projektionen der gedachten Geraden, die nach vorigem Lehrsatz (§. 9) ganz in der Ebene P Q R′ liegt.

**11. Aufgabe.** Es sind die Risse einer Ebene gegeben; man soll die Projektionen einer Geraden finden, die beliebig in der Ebene liegt, Fig. 5.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse einer Ebene. Nehme darum die Punkte A und B′ als Spuren einer Geraden beliebig an und suche nach der vorigen Aufgabe (§. 10) ihre Projektionen (A b, a′B′), so sind diese die Projektionen einer Geraden, die nach obigem Lehrsatz (§. 9) beliebig in der Ebene selbst liegt.

**12. Aufgabe.** Es sind die Risse einer Ebene gegeben; man soll die Projektionen eines Punktes finden, der beliebig in einer Ebene liegt, Fig. 6.

Auflösung. Suche zuerst nach der vorigen Aufgabe (§. 11) die Projektionen (A b, a′B′) einer beliebigen Geraden, die in der gegebenen Ebene P Q R′ liegt, und nehme hierauf in der Geraden den Punkt (c, c′) beliebig an, so liegt dieser nothwendig auch in der gegebenen Ebene.

**13. Lehrsatz.** Parallele Geraden haben auch in derselben Projektionsebene parallele Projektionen. Denn wenn zwei Geraden im Raume parallel sind, so sind auch ihre gleichnamigen projicirenden Ebenen unter sich parallel. Parallele Ebenen werden aber nach einem bekannten geometrischen Satze von einer beliebigen dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten. Und

da die Projektion einer Geraden im Raume nach Früherm (II. 1, §. 41) auch als Durchschnitt ihrer projicirenden Ebene mit der entsprechenden Projektionsebene angesehen werden kann, so sind die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden im Raume nothwendig auch unter sich parallel.

14. Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier Parallelen gegeben; man soll die Risse der Ebene finden, die durch dieselben bestimmt ist, Fig. 7.

Auflösung. Es seien (A b, a' B') und (C d, c' D') die Projektionen der beiden gegebenen Parallelen. Nach dem vorigen Lehrsatz (§. 13) ist daher A b || C d und a' B' || c' D'. Suche nach Früherm (§. 5) die Spuren der beiden Parallelen und verbinde die gleichnamigen A und C, sowie B' und D', so sind A C und B' D' nach dem obigen Lehrsatz (§. 9) die verlangten Risse, die sich zur Probe in einem Punkt E der Achse durchschneiden.

15. Aufgabe. Es sind ebenso die Projektionen zweier sich Durchschneidenden gegeben; man soll die Risse der Ebene finden, die durch dieselben bestimmt ist, Fig. 8.

Auflösung. Es seien wieder (A b, a' B') und (C d, c' D') die Projektionen der beiden gegebenen Durchschneidenden und (n, n') seien die Projektionen ihres Durchschnittspunktes. Suche, wie in der vorigen Aufgabe (§. 14), die Spuren A und B', sowie C und D' der Durchschneidenden und verbinde die gleichnamigen A und C, sowie B' und D', so sind nach demselben Lehrsatz (§. 9) die Verbindungslinien A C und B' D' die verlangten Risse, die sich zur Probe ebenfalls in einem Punkt E der Achse schneiden.

16. Aufgabe. Es sind die Risse zweier sich schneidenden Ebenen gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe ihrer Durchschnittslinie finden, Fig. 9.

Auflösung. Es seien (P Q, P R') die Risse der einen und (S Q, S R') die Risse der andern der gegebenen Ebenen, von denen sich die Horizontalrisse in Q und die Vertikalrisse in R' schneiden. Diese beiden Punkte gehören aber auch der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider Ebenen an, und da sie zugleich die Spuren derselben sind, so erhält man nach Früherm (§. 10.) ihre Projektionen, indem man die Punkte Q und R' in die Achse projicirt und die Geraden Q r und q' R' zieht.

Die wahre Größe der Durchschnittslinie (Q r, q' R') findet man nach Früherm (II. 1, §. 48, Fig. 18), indem man dieselbe in eine der Projektionsebenen, z. B., in die H. E. nach $QR_1$ umlegt.

17. Aufgabe. Man soll zur vorigen Aufgabe eine Modellzeichnung anfertigen, Fig. 10.

Dem Anfänger ist es sehr zu empfehlen, sich auch zu den Aufgaben dieses Abschnittes Modelle in Karton, Holz oder Blech anzufertigen, damit er sich dieselben durch unmittelbare Anschauung möglichst klar mache.

Soll daher z. B. zur vorigen Aufgabe eine Modell-

zeichnung angefertigt werden, so ziehe in Fig. 10 eine Gerade Q R und mache sie gleich $Q R_1$ in Fig. 9, beschreibe mit P Q und P R′ aus Q und R Bogen, die sich in P, und ebenso mit S Q und S R′ aus Q und R Bogen, die sich in S durchschneiden, verbinde P und S mit Q und R gehörig verlängert und ziehe endlich die gebrochenen Linien T U und V W beliebig. Die in Q R sich schneidenden und zum Theil auf einander liegenden Winkeldreiecke P T U und S V W versinnlichen alsdann die in Fig. 9 dargestellten, sich schneidenden Ebenen.

Will man hiernach das Modell aus Karton u. s. w. wirklich anfertigen, so muß man die Stücke P T U und S V W auf dem betreffenden Material einzeln zeichnen und nach der Schnittlinie Q R zur Hälfte ausschneiden. Werden sodann die beiden Stücke in einander geschoben und auf den unterm rechten Winkel aufgerichteten Projektionstafeln, worüber schon in den „Elementen" (II. 1, §. 31 und 39) das Nöthige erklärt und angegeben worden ist, aufgestellt, so ist das verlangte Modell erhalten.

**18.** Aufgabe. Es sind die Risse zweier sich schneidenden Ebenen gegeben, von denen nur ein Paar Risse, z. B. die horizontalen Risse, sich schneiden, die vertikalen Risse aber auf der Zeichnungsfläche sich nicht mehr treffen, Fig. 11 und 12.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse der einen und (S Q, S T′) die Risse der andern der gegebenen sich schneidenden Ebenen. Die horizontalen Risse schneiden sich in Q, während die vertikalen Risse sich auf der Zeichnungsfläche nicht mehr treffen. Da (Q, q′) schon als ein Punkt und zwar als Horizontalspur der Durchschnittslinie bekannt ist, so hat man, um deren Lage festzusetzen, nur noch einen zweiten Punkt derselben nöthig. Einen solchen zu erhalten, schneide man die beiden gegebenen Ebenen entweder durch eine horizontale Hülfsebene, wie in Fig. 11, oder die eine derselben durch eine zur andern parallele Hülfsebene, wie in Fig. 12.

Im erstern Fall, Fig. 11, schneidet die Hülfsebene, deren Vertikalriß A′ B′ parallel zur Achse ist, die beiden gegebenen Ebenen in zwei Geraden, deren Vertikalprojektionen mit A′ B′ zusammenfallen und deren Horizontalprojektionen a c und b c beziehungsweise mit den Horizontalrissen P Q und S Q der gegebenen Ebenen parallel sind (s. die Auflösung der folgenden Aufgabe 19). Ihr Durchschnittspunkt (c, c′) bestimmt alsdann einen zweiten Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen und damit sind die Projektionen (Q c, q′ c′) der letztern gefunden.

Im andern Falle, Fig. 12, schneidet die Hülfsebene deren Risse A B || P Q und A C || P R′ (s. den Lehrsatz 33), die Ebene (S Q, S T′) in einer Geraden, deren Projektionen (B c, b′ C′) wie in Fig. 9 (§. 16) erhalten werden und womit die Projektionen (Q d, q′ d′) der Durchschnittslinie beider Ebenen beziehungsweise parallel sind.

**19.** Aufgabe. Es seien die Risse zweier Ebenen gegeben, von denen die eine mit einer P. E., z. B. mit der H. E., parallel ist; man soll die Projektionen ihrer Durchschnittslinie finden, Fig. 13.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse der einen und S T′ der V=Riß der andern Ebene. In diesem Falle schneidet die letztere die erstere in einer Geraden, die zu P Q, dem H=Riß dieser Ebene, parallel ist, sich also horizontal nach a b || P Q und vertikal nach A′ b′ parallel zur Achse und mit S′ T′ zusammenfallend projicirt. Man projicire also A′ nach a und ziehe a b || P Q, so sind (a b, A′ b′) die verlangten Projektionen der Durchschnittslinie beider Ebenen.

**20.** Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht auf dem bekannten stereometrischen Lehrsatze, daß, wenn zwei parallele Ebenen, wie hier die horizontale Ebene S′ T′ und die Horizontalprojektionsebene, von einer dritten Ebene, wie hier von der Ebene Q P R′, geschnitten werden, auch ihre Durchschnittslinien parallel sind und folglich nach einem früheren Lehrsatze (§. 13) auch parallele Projektionen a b || P Q haben.

**21.** Aufgabe. Es sind die Risse zweier sich schneidenden Ebenen gegeben, deren Vertikalrisse parallel sind und deren Horizontalrisse sich in einem beliebigen Punkte schneiden; man soll die Projektionen ihrer Durchschnittslinie finden, Fig. 14.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse der einen und (S Q, S T′) die Risse der andern Ebene deren H=Risse sich in Q schneiden und deren V=Risse P R′ und S T′ parallel sind. In diesem Falle muß die Schnittlinie beider Ebenen nothwendig mit ihren V=Rissen, also auch mit der V. E. parallel sein. Projicire daher Q nach q′ in die Achse und ziehe Q a parallel zur Achse und q′ a′ || P R′ || S T′, so sind (Q a, q′ a′) die verlangten Projektionen der Durchschnittslinie beider Ebenen.

**22.** Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht auf einem andern bekannten stereometrischen Satze, daß, wenn von den Durchschnittslinien dreier sich schneidenden Ebenen zwei parallel sind, diesen auch die dritte parallel sein muß. Die drei Ebenen sind im vorliegenden Falle die beiden gegebenen Q P R′, Q S T′ und die V. E. Da nun nach der Voraussetzung die Risse P R′ und S T′ oder Durchschnittslinien der beiden erstern mit der letztern unter sich parallel sind, so muß denselben auch die dritte Durchschnittslinie (Q a′, q′ a′), also Q a parallel zur Achse und q′ a′ || P R′ || S T′ sein.

**23.** Aufgabe. Es sind die Risse zweier sich schneidenden Ebenen gegeben, die zur Achse parallel sind; man soll die Projektionen ihrer Durchschnittslinie finden, Fig. 15.

Auflösung. Es seien (P Q, R′ S′) die Risse der einen und (T U, V′ W′) die Risse der andern Ebene. Da beide Ebenen nach Voraussetzung zur

Achse parallel sind, so sind nach dem in §. 22 angeführten Satze auch ihre Risse zur Achse parallel. Nach demselben Satze ist aber auch die zu suchende Durchschnittslinie mit der Achse und den gegebenen Rissen der Ebenen parallel. Es handelt sich also, um ihre Lage festzusetzen, einen einzigen Punkt derselben zu finden. Dazu schneide die beiden gegebenen Ebenen durch eine Hülfsebene, z. B. durch eine zur Achse senkrechte Hülfsebene A G D'. Diese schneidet beide gegebenen Ebenen in Geraden, die in der horizontalen Umlegung nach $AB_1$ und $CD_1$ zu liegen kommen. Ihr Durchschnittspunkt $E_1$ bestimmt alsdann einen Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider Ebenen. Bringt man daher diesen Punkt in seine ursprüngliche Lage (e, e') zurück, indem man $E_1 e_1$ zur Achse senkrecht zieht und aus G mit $G e_1$ den Bogen $e_1 e'$ beschreibt, und zieht endlich e f und e' f' parallel zur Achse, so sind dieß die verlangten Projektionen der Durchschnittslinie beider zur Achse parallelen Ebenen.

**24.** Aufgabe. Man soll zur vorigen Aufgabe eine Modellzeichnung anfertigen, Fig. 16.

Auflösung. Da in Fig. 15 die umgelegten Durchschnittslinien $AB_1$ und $CD_1$ die wahren Breiten der beiden sich schneidenden Ebenen angeben, so ziehe man in Fig. 16 eine Gerade A D hinreichend lang und trage darauf $AE = AE_1$, $BE = B_1 E_1$, $CE = CE_1$ und $DE = D_1 E_1$ ab, errichte hierauf in den Punkten A, B, C, D und E Senkrechte zur Hülfslinie und begrenze sie bei P R, Q S, T V und U W beliebig, so ist die Modellzeichnung erhalten.

Will man alsdann das Modell in Karton u. s. w. anfertigen, so muß man die Stücke P R S Q und T V W U wieder einzeln aufzeichnen und ausschneiden und nach der Schnittlinie E F zur Hälfte durchschneiden, um das eine in das andere einschieben und auf den Projektionstafeln aufstellen zu können.

**25.** Aufgabe. Es sind die Risse einer Ebene und die Projektionen einer Geraden im Raume gegeben, welche erstere schneidet; man soll die Projektionen ihres Durchschnittspunktes finden, Fig. 17, 18, 19.

Auflösung. Es seien (P Q, P R') die Risse der Ebene und (a b, a' b') die Projektionen der Geraden.

Man denke sich durch letztere eine Hülfsebene gelegt, welche erstere in einer Geraden durchschneidet. Diese wird dann die gegebene Gerade in einem Punkt durchschneiden, welches der verlangte Durchschnittspunkt ist.

Am einfachsten ist es, sofern es angeht, sich einer projicirenden Hülfsebene zu bedienen, weil dann der eine Riß derselben immer schon mit der gleichnamigen Projektion der gegebenen Geraden zusammenfällt und der andere senkrecht zur Achse ist.

**26.** In Fig. 17 ist auf diese Weise die horizontal projicirende Hülfsebene benutzt worden. Ihr H-Riß C d fällt demnach mit der H-Projektion a b der Ge-

raden zusammen und der V-Riß d D' ist senkrecht zur Achse.

Projicirt man C nach c' und zieht c' D', so sind (C d, c' D') nach Früherem (§. 16, Fig. 9) die Projektionen der Durchschnittslinie der Hülfsebene C d D' mit der gegebenen Ebene Q P R' und folglich (e, e') die Projektionen des gesuchten Durchschnittspunktes der gegebenen Geraden mit der gegebenen Ebene.

**27.** In Fig. 18 ist ebenso die vertikal projicirende Ebene benutzt worden. Ihr V-Riß c D' fällt demnach mit der V-Projektion a' b' der gegebenen Geraden zusammen und der Horizontalriß c' C ist senkrecht zur Achse.

Die Projektionen (C d, c' D') der Durchschnittslinie der Hülfsebene mit der gegebenen Ebene ergeben sich alsdann wieder wie früher (§. 16, Fig. 9) und damit sind auch die Projektionen (e, e') des gesuchten Durchschnittspunktes der gegebenen Geraden mit der gegebenen Ebene bestimmt.

**28.** In Fig. 19 endlich ist eine beliebige Hülfsebene zur Lösung der Aufgabe benutzt worden. Um deren Risse zu finden, suche nach Früherem (§. 5, Fig. 1—3) die Spuren C und D' der gegebenen Geraden, ziehe E F durch C beliebig und verbinde E mit D' gehörig verlängert. E F und E G' sind alsdann nach dem obigen Lehrsatz (§. 9) die Risse der beliebig angenommenen Hülfsebene F E G', welche die gegebene Ebene Q P R' nach Früherem (§. 16, Fig. 9) in der Geraden (F g, f' G') schneidet, und damit sind endlich auch die Projektionen (h, h') der gegebenen Geraden (a b, a' b') mit der gegebenen Ebene Q P R' bestimmt.

**29.** Lehrsatz. Wenn eine Gerade auf einer Ebene im Raume senkrecht steht, so sind auch die Projektionen der ersteren auf den Rissen der letzteren senkrecht und umgekehrt, wenn in einer solchen Zeichnung die Projektionen einer Geraden auf den Rissen einer Ebene senkrecht sind, so ist auch die Gerade selbst auf der Ebene im Raume senkrecht, Fig. 20. Denn denkt man sich durch die gegebene Gerade (a b, a' b') eine projicirende, z. B. eine horizontal projicirende, Hülfsebene C b B' gelegt, so steht diese nicht nur auf der horizontalen Projektionsebene, sondern auch auf der gegebenen schiefen Ebene Q P R' senkrecht. Nach einem bekannten stereometrischen Satze ist daher auch die Durchschnittslinie der beiden letztern, d. i. der H-Riß Q P der gegebenen schiefen Ebene, auf der ersteren oder ihrem H-Riß, d. i. auf der H-Projektion a d der gegebenen Geraden, senkrecht.

Ebenso beweist man, daß auch der V-Riß P R' der gegebenen schiefen Ebene auf der V-Projektion a' b' der gegebenen Geraden senkrecht ist.

**30.** Aufgabe. Es sind die Risse einer Ebene und die Projektionen eines Punktes im Raume gegeben, man soll die Projektionen und wahre Größe

des kürzesten Abstandes des letzteren von der erstern finden, Fig. 20.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse der gegebenen Ebene und (a, a′) die Projektionen des gegebenen Punktes. Der kürzeste Abstand von letzterem auf erstere ist offenbar eine Senkrechte von jenem auf diese. Ziehe deßhalb nach dem vorigen Lehrsatze (§. 29) a b ⊥ P Q und a′ b′ ⊥ P R′ und bestimme nach Früherem (§. 25 und 26, Fig. 17) die Projektionen (d, d′) des Durchschnittspunktes des Perpendikels (a b, a′ b′) mit der gegebenen Ebene Q P R′ und durch Umdrehung des Abstandes (a d, a′ d′) in eine zur V. E. parallele Lage dessen wahre Größe a′ $d_1$′ wie dieß schon früher in den „Elementen“ (II. 1, §. 49, Fig. 19) gezeigt worden ist.

**31.** Aufgabe. Es sind die Projektionen dreier Punkte oder eines Dreiecks im Raume gegeben und eine Projektion, z. B. die V-Projektion eines in der Ebene der drei Punkte oder des Dreiecks gelegenen Punktes; man soll die Projektionen einer Geraden finden, die in diesem Punkte senkrecht auf jener Ebene steht, Fig 21.

Auflösung. Es seien (a b c, a′ b′ c′) die Projektionen des gegebenen Dreiecks und d′ die gegebene V-Projektion des darin gelegenen Punktes, in welchem auf die Ebene des Dreiecks ein Perpendikel errichtet werden soll. Es handelt sich nun vor Allem um die Bestimmung der zu d′ gehörigen Horizontalprojektion. Dazu ziehe durch d′ eine beliebige Gerade, z. B. e′ f′, welche die beiden Seiten a′ c′ und b′ c′ in e′ und f′ durchschneidet, projicire diese Punkte auf die zugehörigen Horizontalprojektionen a c und b c nach e und f und ziehe die Verbindungslinie e f, welche die projicirende Linie durch d′ in d schneidet. Dann ist d die verlangte Horizontalprojektion des gedachten Punktes.

Hätte man nun die Risse der Dreiecksebenen, so erhielte man nach dem vorigen Lehrsatz (§. 29) die Projektionen des verlangten Perpendikels, wenn man von den Projektionen d und d′ auf die gleichnamigen Risse Senkrechte ziehen würde. Nach Früherem (§. 15, Fig. 8) ließen sich nun zwar die Risse der durch das Dreieck (a b c, a′ b′ c′) bestimmten unbegrenzten Ebene leicht finden und damit die vorstehende Aufgabe lösen. Indessen wollen wir in der folgenden Nummer noch eine andere Auflösung kennen lernen, bei der wir die Risse selbst nicht nöthig haben.

**32.** Denkt man sich durch irgend einen Punkt einer Ebene Parallelen mit den Rissen derselben, so nennt man dieselben, wie schon in den „Elementen“ (II. 1, §. 144) angedeutet worden, Hauptlinien der Ebene und zwar die mit dem H-Riß, also auch mit der H. E. Parallele die horizontale Hauptlinie und die mit dem V-Riß, also auch mit der V. E. Parallele die vertikale Hauptlinie. Nach dem, was über die Projektionen solcher Geraden schon in den „Ele-

menten" (II. 1, §. 53, 4) erläutert worden, ist sofort klar, daß die V-Projektion der horizontalen Hauptlinie und ebenso auch die H-Projektion der vertikalen Hauptlinie parallel zur Achse ist.

Dieß vorausgesetzt, so löst sich obige Aufgabe mittelst der Hauptlinien, wie folgt. Ziehe durch d' (wie dieß bereits schon oben geschehen) eine Parallele e' f' zur Achse und suche die zugehörige Horizontalprojektion e f, so sind dieß die Projektionen der durch (d, d') gelegten horizontalen Hauptlinie. Ziehe ebenso durch d eine Parallele g h zur Achse und projicire sie vertikal nach g' h', so sind dieß die Projektionen der durch (d, d') gelegten vertikalen Hauptlinie. Und da nun nach dem, was oben gesagt worden ist, e f parallel mit dem unbekannten H-Riß und g' h' parallel mit dem unbekannten V-Riß der Dreiecksebene ist, so hat man, um die Projektionen (d i, d' i') des durch (d, d') gehenden Perpendikels zu erhalten, nach dem obigen Lehrsatz (§. 29) einfach d i $\perp$ e f und d' i' $\perp$ g' h' zu ziehen.

**33.** Lehrsatz. Parallele Ebenen haben in derselben Projektionsebene auch parallele Risse, Fig. 22. Denn dieselben werden, wie schon oben (§. 18, Fig. 12) angegeben, von einer dritten Ebene, also auch von der H. E. oder V. E. in parallelen Linien geschnitten. Deßhalb sind sowohl die H-Risse, als die V-Risse der gegebenen parallelen Ebenen auch unter sich parallel. In Fig. 22 sind darum die gleichnamigen Risse der parallelen Ebenen Q P R' und T S U', nämlich P Q und S T, sowie P R' und S U' unter sich parallel.

**34.** Aufgabe. Es sind die Risse zweier parallelen Ebenen gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe ihres kürzesten Abstandes finden, Fig. 22.

Auflösung. Es seien (P Q, P R') und (S T, S U') die Risse der beiden gegebenen parallelen Ebenen, von denen die gleichnamigen P Q und S T, sowie P R' und S U' nach dem vorigen Lehrsatz (§. 33) unter sich parallel sind.

Der kürzeste Abstand zwischen beiden Ebenen ist ebenfalls eine zu beiden Senkrechte. Nehme daher in der einen Ebene (P Q, P R') einen beliebigen Punkt (a, a') an (§. 12, Fig. 6) und fälle von ihm nach Fig. 20 (§. 30) auf die andere Ebene (S T, S U') eine Senkrechte (a c, a' c'), bestimme die Projektionen ihres Durchschnittspunktes (d, d') mit dieser Ebene nach Fig. 17 (§. 25 und 26) und ihre wahre Größe a' d', durch Umdrehung in eine zur V. E. parallele Lage, wie dieß schon in den „Elementen" (II. 1, §. 49, Fig. 19) gezeigt worden ist.

**35.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Geraden und die Projektionen eines beliebigen Punktes im Raume gegeben; man soll durch letztern auf erstere eine senkrechte Ebene fällen und deren Risse bestimmen, Fig. 23.

Auflösung. Es seien (a b, a' b') die Projektio-

nen der gegebenen Geraden und (c, c′) die Projektionen des gegebenen Punktes, durch welchen auf erstere eine senkrechte Ebene errichtet werden soll. Nach dem obigen Lehrsatze (§. 29) müssen die zu suchenden Risse dieser Ebene jedenfalls senkrecht auf den zugehörigen Projektionen der Geraden (a b, a′ b′) sein. Um jene zu finden, benutzt man auch hier am besten die Hauptlinien (c d, c′ D′) und (c E, c′ e′), die nach obiger Erklärung (§. 32) durch den gegebenen Punkt (c, c′) parallel zu den entsprechenden, noch unbekannten Rissen, oder also senkrecht zu den Projektionen a b und a′ b′ der gegebenen Geraden gehen. Bestimmt man ihre Spuren D′ und E, so liegen diese nach dem früheren Lehrsatz (§. 9) in den Rissen der verlangten Ebene. Man hat daher nur noch, um dieselben zu erhalten, durch D′ eine Parallele zu c′ e′ oder eine Senkrechte zu a′ b′ und durch E eine Parallele zu c d oder eine Senkrechte zu a b zu ziehen. Zur Probe müssen sich dann diese Risse in einem Punkt F der Achse schneiden.

**36.** Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier Parallelen im Raume gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe ihres kürzesten Abstandes finden, Fig. 24.

Auflösung. Es seien (a b, a′ b′) die Projektionen der einen und (c d, c′ d′) die Projektionen der andern Geraden. Nehme in der erstern (a b, a′ b′) den beliebigen Punkt (e, e′) an (II. 1, §. 36, 1), lege durch ihn auf die andere Gerade nach der vorigen Aufgabe (§. 35) eine senkrechte Hülfsebene F H G′ und bestimme deren Durchschnittspunkt (l, l′) mit der zweiten Geraden (c d, c′ d′) (§. 26), so sind die Verbindungslinien (e l, e′ l′) die Projektionen des verlangten kürzesten Abstandes, dessen wahre Größe e $l_1$ auf bekannte Weise (II. 1, §. 49, Fig. 19) durch Drehung in eine, z. B. zur H. E., parallele Lage erhalten wird.

37. Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend zweier, nicht in derselben Ebene liegender (also weder paralleler, noch sich schneidender) Geraden gegeben; man soll ihren kürzesten Abstand finden, Fig. 25—26.

Auflösung. Um dem Anfänger diese schon etwas schwierigere Aufgabe zu erleichtern, möge der eigentlichen graphischen Auflösung nach der gewöhnlichen rechtwinkligen Projektionsart eine vereinfachte geometrische Auflösung an der Hand der parallelperspektivischen (Fig. 25 a) vorausgeschickt werden.

In dieser Figur seien I und II die gegebenen Geraden, die, der Voraussetzung zufolge, weder parallel sind, noch sich schneiden. Um ihren kürzesten Abstand, der wiederum zu beiden Geraden senkrecht ist, zu finden, nehme 1) in I einen beliebigen Punkt A an, ziehe 2) durch ihn mit II eine Parallele A B, lege 3) durch I und A B eine Ebene D C F E, nehme 4) in II einen beliebigen Punkt G an, fälle 5) von ihm auf die Ebene C D E eine Senkrechte G H, be-

stimme 6) ihren Durchschnittspunkt K mit der Ebene CDE, ziehe 7) durch K eine Parallele KL mit AB, resp. mit I und 8) durch L mit GH eine Parallele LM, welche II in M nothwendig schneidet und auf beiden Geraden I und II senkrecht ist, daher den kürzesten Abstand der letztern bestimmt.

38. Graphische Auflösung, Fig. 25.

In dieser Figur seien wieder (I, I') und (II, II') die beiden gegebenen Geraden, deren kürzester Abstand gefunden werden soll. Nehme 1) in der erstern (I, I') einen beliebigen Punkt (a, a') an (II. 1, §. 36, 1), ziehe 2) durch diesen Punkt mit der andern Geraden (II, II') eine Parallele (D e, d' E') (§. 13), suche 3) die Risse F D, F E' der durch (I, I') und (D e, d' E') gelegten Hülfsebene (§. 15), nehme 4) in (II, II') einen beliebigen Punkt (g, g') an (II. 1, §. 36, 1), fälle 5) von diesem Punkt auf die Hülfsebene D F C' eine Senkrechte (g h, g' h') (§. 29), bestimme 6) ihren Durchschnittspunkt (k, k') mit der Hülfsebene D F C' (§. 26), ziehe 7) durch (k, k') mit (D e, d' E') oder (II, II') eine Parallele (k l, k' l') (§. 13), wobei zur Probe (l, l') senkrecht über einander liegen, und endlich 8) ziehe durch (l, l') mit (g k, g' k') eine Parallele (l m, l' m') (§. 13), wobei (m, m') zur Probe ebenfalls senkrecht über einander liegen, so ist (l m, l' m') der verlangte kürzeste Abstand der beiden gegebenen Geraden. Die wahre Größe $l' m_1'$ findet sich auf bekannte Weise (II. 1, §. 49, Fig. 19) durch Drehung derselben in eine zu einer P. E., z. B. zur V. E., parallele Lage.

39. Vorstehende Aufgabe kann bedeutend vereinfacht werden, wenn man eine der gegebenen Geraden senkrecht oder parallel mit einer der P. E. annimmt. Es sei eine der beiden gegebenen Geraden senkrecht zur H. E., also parallel zur V. E. In diesem Fall ist daher der kürzeste Abstand, als Senkrechte zwischen beiden gegebenen Geraden, nothwendig horizontal und projicirt sich derselbe horizontal, folglich in wahrer Größe und senkrecht auf die H-Projektion der andern Geraden und vertikal verkürzt und parallel zur Achse.

Sind daher in Fig. 26 (I, I') die Projektionen der einen, zur H. E. senkrechten Geraden und (II, II') die Projektionen der andern, zu beiden P. E. noch schiefen Geraden, so ziehe a b ⊥ II und projicire b nach b' und ziehe b' a' parallel zur Achse, so sind (a b, a' b') die Projektionen und a b zugleich die wahre Größe des verlangten kürzesten Abstandes.

40. Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier Geraden im Raume gegeben, die sich schneiden; man soll die wahre Größe ihres Neigungswinkels finden, Fig. 27.

Auflösung. Es seien (a b, a' b') und (c b, c' b') die Projektionen der beiden gegebenen Geraden, die sich in (b, b') schneiden (II. 1, §. 36, 1) und deren Neigungswinkel $\alpha$ in wahrer Größe gefunden werden soll. Schneide beide gegebenen Geraden durch eine

beliebige horizontale Hülfslinie, deren Vertikalprojektion d′ e′ parallel zur Achse und deren Horizontalprojektion d e erhalten wird, indem man d′ und e′ nach d und e projicirt und diese Punkte verbindet. Hierauf denke man sich das Dreieck (a b c, a′ b′ c′) um die Gerade (d e, d′ e′) als Drehachse in eine zur H. E. parallele Lage gedreht. Dabei beschreibt der Scheitel (b, b′) einen Bogen, der sich horizontal als die Gerade $b\,b_2$, senkrecht zu d e, projicirt und dessen Radius in der horizontalen Umdrehung sich als Hypothenuse $g\,b_1$ eines rechtwinkligen Dreiecks $g\,b\,b_1$ darstellt, dessen eine Kathete die Senkrechte b g zu d e und dessen andere Kathete $b\,b_1$ senkrecht zu b g und gleich b′ f′ ist. Beschreibt man daher aus g mit $g\,b_1$ den Bogen $b_1\,b_2$ und verbindet $b_2$ mit d und e, so ist $\measuredangle\, d\,b_2\,e = \alpha$ die wahre Größe des verlangten Neigungswinkels.

**41.** Schneiden sich die beiden Geraden der vorigen Aufgabe nicht, so nehme man in der einen derselben einen beliebigen Punkt an und ziehe durch ihn mit der andern Geraden eine Parallele (§. 13). Der Winkel, den diese Hülfslinie mit der ersten Geraden bildet und den man wie in der vorigen Aufgabe (§. 40) findet, ist dann auch gleich dem Winkel, den beide gegebenen Geraden im Raume selbst mit einander bilden.

**42.** Den Winkel, den zwei ebene Flächen mit einander bilden, nennt man einen Flächenwinkel. Derselbe wird gemessen durch einen Linienwinkel, den man erhält, indem man in irgend einem Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie auf diese in jeder Ebene eine Senkrechte zieht; oder noch kürzer, indem man beide Flächen in einem beliebigen Punkt ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie durch eine zu dieser senkrechten Ebene schneidet. Die beiden Durchschnittslinien dieser Ebene mit den beiden gegebenen schließen dann ebenfalls den gesuchten Winkel ein. Dieser Linienwinkel, welcher das Maß des gegebenen Flächenwinkels angibt, heißt gewöhnlich der Neigungswinkel des gegebenen Flächenwinkels. Der Neigungswinkel einer beliebig schiefen Ebene im Raume mit der H. E. und V. E. wurde schon in den „Elementen" (II. 1, §. 87) bestimmt. Der Neigungswinkel, den zwei beliebige schiefe Ebenen im Raume mit einander bilden, soll noch besonders in der folgenden Nummer bestimmt werden.

**43.** Aufgabe. Es sind die Risse zweier Ebenen gegeben, die sich im Raume schneiden; man soll die wahre Größe ihres Neigungswinkels finden, Fig. 28.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) und (S Q, S R′) die Risse der beiden gegebenen Ebenen. Suche vor Allem die Projektionen (Q r, q′ R′) und die wahre Größe $Q\,R_1$ ihrer Durchschnittslinie (§. 16, Fig. 9); hierauf schneide beide Ebenen durch eine Hülfsebene senkrecht zu ihrer Durchschnittslinie und bestimme die beiden Geraden, worin sich dieselben schneiden, so

werden diese den verlangten Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen einschließen. Man ziehe daher durch einen beliebigen Punkt E der H-Projektion Q r auf diese eine Senkrechte A B, so kann diese (nach §. 29) als H-Riß der zur Durchschnittslinie beider Ebenen senkrechten Hülfsebene angesehen werden. Denkt man sich dann noch diese Ebene um A B als Drehachse in die H. E. umgelegt, so beschreibt der Scheitel oder ihr Schnittpunkt mit der Durchschnittslinie beider gegebenen Ebenen einen Bogen, dessen Radius gleich ist der von E auf die umgelegte Schnittlinie $QR_1$ gefällten Senkrechten $EC_1$. Beschreibt man daher mit $EC_1$ aus E den Bogen $C_1C_2$ und zieht $AC_2$ und $BC_2$, so ist $\measuredangle\, AC_2B = \alpha$ die wahre Größe des in die H. E. umgelegten verlangten Neigungswinkels. Zieht man noch $C_1 c \parallel AB$ oder $\perp$ Q r und A c und B c, so ist $\measuredangle$ A c B zugleich die Horizontalprojektion des gedachten Neigungswinkels.

44. Die vorstehende Aufgabe kann auch auf folgende zweite Art gelöst werden. Sind wieder Q P R′ und Q S R′, Fig. 28, die beiden Ebenen und (Q r, q′ R′) ihre Durchschnittslinie, so nehme in dieser den beliebigen Punkt (c, c′) an und lege durch diesen eine zu (Q r, q′ R′) senkrechte Hülfsebene, so werden ihre Schnittlinien mit den Ebenen Q P R′ und Q S R′ wiederum den verlangten Neigungswinkel einschließen. Den H-Riß dieser Hülfsebene zu erhalten, ziehe durch den angenommenen Punkt (c, c′) die vertikale Hauptlinie, deren Vertikalprojektion c′ d′ also senkrecht zur Vertikalprojektion q′ R′ der Durchschnittslinie beider gegebenen Ebenen und deren Horizontalprojektion c D parallel zur Achse (§. 32). Die Horizontalspur D dieser Hauptlinie bestimmt dann (nach §. 9) einen Punkt des verlangten Horizontalrisses [1], und da er (nach §. 29) senkrecht auf Q r sein muß, so hat man, um ihn zu erhalten, von D nur eine Senkrechte A B zu Q R zu ziehen. Verbindet man nun A und B mit c, so ist $\measuredangle$ A c B die Horizontalprojektion des gesuchten Neigungswinkels, und zieht man noch $cC_1 \perp cE$ und macht $cC_1 = c'c_1$, so ist $C_1$ die in die H. E. umgelegte Spitze des Winkels (zur Probe muß $C_1$ in $QR_1$ fallen) und $EC_1$ der Radius des Bogens, den dieselbe beim Umlegen der Winkelebene A c B in die H. E. nach $AC_2B$ beschreibt. Schlägt man daher $EC_1$ nach $EC_2$ und zieht $AC_2$ und $BC_2$, so ist $\measuredangle\, AC_2B$ die wahre Größe des gesuchten Neigungswinkels.

45. Aufgabe. Es sind die Risse einer Ebene und die Projektionen einer sie beliebig schneidenden Geraden im Raume gegeben; man soll die wahre Größe ihres Neigungswinkels mit der erstern finden, Fig. 29.

Auflösung. Es seien (P Q, P R′) die Risse

---

[1] Der Vertikalriß ist überflüssig, daher nicht gesucht worden.

der gegebenen Ebene und (a b, a′ b′) die Risse der gegebenen Geraden.

Suche vor Allem die Projektionen (b, b′) des Durchschnittspunktes der letztern mit der erstern (§. 27, Fig. 18); hierauf bestimme die Projektionen (b c, b′ c′) der gegebenen Geraden (a b, a′ b′) auf die schiefe Ebene Q P R′ im Raume, indem man von einem Punkt (a, a′) derselben auf diese eine Senkrechte fällt (§. 29), ihren Durchschnittspunkt (c, c′) mit der Ebene Q P R′ sucht (§. 26, Fig. 17) und ihn mit (b, b′) verbindet. Die beiden Geraden (a b, a′ b′) und (b c, b′ c′) schließen alsdann mit einander den verlangten Winkel ein, dessen wahre Größe $\sphericalangle\, i\, b_2\, k = \alpha$, wie in §. 34, Fig. 22, gefunden wird.

**46.** Wenn drei, vier oder mehrere Ebenen sich so durchschneiden, daß ihre Durchschnittslinien in einem Punkte sich treffen, so bilden sie eine Raumecke oder einen Körperwinkel, und zwar, nach der Zahl der sich schneidenden Ebenen, eine dreikantige, vierkantige oder vielkantige Raumecke, oder kurz ein Dreikant, Vierkant oder Vielkant.

Das Dreikant nimmt unter den räumlichen Ecken dieselbe Stelle ein, wie das Dreieck oder Dreiseit unter den Flächenfiguren.

Am Dreikant unterscheidet man ebenfalls drei Seiten und drei Winkel. Unter den Seiten versteht man die drei einschließenden Ebenen, oder besser die drei von den Kanten gebildeten Kanten- oder Linienwinkel und unter den Winkeln die drei von den einschließenden Ebenen gebildeten Flächenwinkel oder statt deren auch ihre Neigungswinkel (§. 42). Sind drei von diesen sechs Stücken gegeben, so lassen sich damit immer auch die drei übrigen sowohl durch Konstruktion, als durch Rechnung bestimmen. Jedoch müssen in Bezug auf die Annahme der gegebenen Stücke, wie bei den ebenen Dreiecken, gewisse Bedingungen erfüllt sein. So muß z. B. die Summe zweier Kantenwinkel stets größer und ihre Differenz stets kleiner sein, als der dritte Kantenwinkel. Und alle drei Kantenwinkel der Ecken müssen zusammen kleiner als vier rechte Winkel sein. Diese letztere Bedingung gilt bekanntlich auch für jedes andere Vielkant von mehr als drei Seiten (II. 1, §. 122).

Im Folgenden sollen nun einige dieser Aufgaben über das Dreikant graphisch gelöst werden.

**47.** Aufgabe. Es sind die drei Seiten oder Kantenwinkel eines Dreikants gegeben; man soll die Projektionen dieses Dreikants und die wahre Größe der Neigungswinkel der zugehörigen Flächenwinkel finden, Fig. 30.

Auflösung. Es seien die drei Kantenwinkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einzeln für sich gegeben. Nehme in der H. E. den Punkt A beliebig an und trage die drei gegebenen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so aneinander, daß ihre Scheitel in A zusammenstoßen und der Schenkel A B des mittleren Winkels $\alpha$ auf der Achse senkrecht steht. Alsdann

mache $AD_2 = AD_1$, beschreibe mit $BD_1$ aus B und mit $CD_2$ aus C Kreisbogen, die sich in D' schneiden, projicire D' nach d in die Achse und ziehe A d, B D' und C D', so sind die Projektionen (A B C d, B C D') des Dreikants gefunden. Zugleich ist $\sphericalangle$ C B D' = c der Neigungswinkel des Flächenwinkels, welcher dem Linien- oder Kantenwinkel $\gamma$ gegenüberliegt.

Um den Neigungswinkel b des dem Linienwinkel $\beta$ gegenüberliegenden Flächenwinkels zu finden, schneide man die beiden Ebenen an der Kante A C durch eine in E zu derselben senkrechten Hülfsebene und lege das von ihr abgeschnittene rechtwinklige Dreieck in die H. E. nach $EdD_3$ um (II. 1, §. 87), wobei $dD_3 \perp Ed$ und $= dD'$ und zur Probe überdieß $ED_3 = ED_2$, so ist $\sphericalangle\, dED_3 = b$ der verlangte Neigungswinkel an der Kante A C.

Den Neigungswinkel a an der dritten Kante (A d, a' D') könnte man endlich, wie in §. 43 oder §. 44, Fig. 28, finden. Noch kürzer findet er sich aber, wie folgt. Mache $AF_2 = AF_1$, $F_1H \perp AD_1$, $F_2G \perp AD_2$ und beschreibe mit $HF_1$ aus H und mit $GF_2$ aus G Bogen, die sich zur Probe in $F_3$ schneiden, so ist $\sphericalangle\, GF_3H = a$ der in die H. E. umgeklappte Neigungswinkel an der dritten Kante (A d, a' D'). Zieht man auch G H, so muß diese Gerade als H-Riß der Winkelebene auf A d zur Probe senkrecht sein (§. 29).

**48.** Aufgabe. Es sind zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel oder vielmehr ihr Neigungswinkel gegeben; man soll die Projektionen des Dreikants, sowie die übrigen Stücke finden, Fig. 31.

Auflösung. Es seien $\alpha$, $\beta$ die beiden gegebenen Kantenwinkel und c der gegebene Neigungswinkel. Zeichne wieder die beiden gegebenen Winkel $\alpha$, $\beta$ an einen beliebigen Punkt A der H. E. und so, daß A B senkrecht zur Achse und mache $\sphericalangle$ C B D' = c. Alsdann beschreibe aus B mit $BD_1$ einen Bogen, welcher den Schenkel B D' in D' schneidet, projicire D' nach d und ziehe A d und C D', so sind die Projektionen (A B C d, B C D') des Dreikants gefunden. Hierauf ziehe $dD_2 \perp AC$ und beschreibe aus A mit $AD_1$ einen Bogen, welcher $dD_2$ in $D_2$ durchschneidet, so ist, wenn man $D_2$ mit A und C verbindet, $ACD_2$ die in die H. E. umgelegte dritte Seite und Winkel $CAD_2 = \gamma$ der gesuchte dritte Kantenwinkel. Die beiden Neigungswinkel $dED_3 = b$ und und $GF_3H = a$ findet man endlich wie in der vorigen Aufgabe (§. 48, Fig. 30).

**49.** Die beiden vorigen Aufgaben lassen sich auch bloß mit einer Projektionsebene lösen, wie folgt, siehe Fig. 32 und 33. Im ersten Falle, wenn die drei Kantenwinkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegeben, trage in Fig. 32 die drei gegebenen Linienwinkel an den beliebigen Punkt A als gemeinschaftlicher Scheitel, mache $AD_2 = AD_1$ und ziehe $D_1F \perp AB$ und $D_2E \perp AC$ gehörig verlängert, bis sie sich in d schneiden; verbindet man

dann A mit d, so ist A B C d die Horizontalprojektion des verlangten Dreikants. Zieht man ferner $d D_3 \perp d F$, $d D_4 \perp d E$ und macht $F D_3 = F D_1$ und $E D_4 = E D_2$, so sind, wenn man noch $F D_3$ und $E D_4$ zieht, $\sphericalangle\ d F D_3 = c$ und $\sphericalangle\ d E D_4 = b$ die verlangten Neigungswinkel von den Kanten A B und A C.

Den Neigungswinkel $H G_3 J = a$ an der dritten Kante A d findet man endlich wie in §. 47, Fig. 30.

**50.** Im andern Fall, wenn die zwei Kantenwinkel $\alpha$, $\beta$ und der eingeschlossene Flächenwinkel oder Neigungswinkel c gegeben sind, trage in Fig. 33 die zwei gegebenen Kantenwinkel $\alpha$, $\beta$ wieder an einen beliebigen Punkt A und an die Kante A B in einem beliebigen Punkt F den gegebenen Neigungswinkel c in der horizontalen Umlegung $d F D_3 = c$ ab. Hierauf setze in F ein und beschreibe mit $F D_1$ als Radius einen Bogen, welcher den Scheitel $F D_3$ in $D_3$ schneidet, fälle $D_3 d \perp F d$ und ziehe A d, so ist A B C d die verlangte Horizontalprojektion des Dreikants.

Zieht man ferner $d D_2 \perp A C$ und beschreibt mit $A D_1$ aus A einen Bogen, welcher d E in $D_2$ schneidet, so ist, wenn man noch $A D_2$ zieht, $\sphericalangle\ C A D_2 = \gamma$ der verlangte dritte Kantenwinkel.

Die Neigungswinkel $d E D_4 = b$ und $H G_3 J = a$ finden sich endlich wie in der vorigen Aufgabe (§. 49).

**51.** Diese beiden Aufgaben über das Dreikant mögen hier genügen. Der Schüler wird aber gut thun, für sich wenigstens noch folgende Aufgaben zu lösen:

a) Es ist ein Kantenwinkel und die beiden anliegenden Neigungswinkel gegeben; man soll die übrigen Stücke finden.

b) Es sind alle drei Neigungswinkel gegeben; man soll die drei Kantenwinkel finden u. s. w.

## II.

## Durchschnittskonstruktionen der Körper mit Ebenen, nebst ihren Entwickelungen.

(Fig. 34—56, Blatt 5—12.)

**52.** Die Körper sind entweder von e b e n e n oder k r u m m e n Flächen eingeschlossen.

Im ersten Fall erhält man die Durchschnittsfigur des eckigen, prismatischen oder pyramidalen Körpers mit einer beliebigen Schnittebene, wenn man die Durchschnittspunkte der einzelnen Kanten des erstern mit letzterer bestimmt und dieselben durch gerade Linien in gehöriger Ordnung verbindet.

**53.** Im andern Fall, wenn der Körper von krummen Flächen eingeschlossen, hängt die Konstruktion der Durchschnittsfigur von der Gestalt dieser krummen Flächen ab. Sind diese Zylinder- oder Kegelflächen, so erhält man ihre Durchschnittsfigur mit einer Schnittebene, wenn man auf ihnen eine Reihe von Erzeu-

gungslinien annimmt, deren Durchschnittspunkte mit der Schnittebene bestimmt und dieselben durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand gehörig verbindet. Dieselbe Konstruktion gilt auch für die übrigen scheitrechten Flächen, d. h. für alle krumme Flächen, deren Erzeugende eine Gerade ist (S. II. 1, §. 108).

**54.** Hieraus folgt aber, daß die vorliegende Aufgabe in Betreff der Durchschnittsfigur eines Körpers mit einer Ebene bei Prismen und Pyramiden und polyedrischen Gestalten überhaupt, sowie bei Zylinder- und Kegelflächen und allen scheitrechten krummen Flächen mit der frühern Aufgabe (§. 25—28, Fig. 17—19), den Durchschnittspunkt einer Geraden mit einer Ebene im Raume zu bestimmen, zusammenfällt.

**55.** Bei den krummen Flächen hingegen, deren Erzeugende eine krumme Linie ist, kommt es darauf an, die Durchschnittspunkte dieser krummlinigen Erzeugenden in einer hinreichenden Anzahl von Lagen mit der Schnittebene zu bestimmen. Die Methode der Auflösung besteht dann im Allgemeinen darin, daß man durch diese Kurven passende Flächen und zwar, wenn es angeht, Ebenen oder projicirende Zylinderflächen (II. 1, §. 61) gelegt denkt und ihre Durchschnitte mit der gegebenen Schnittebene sucht, die Punkte, in welcher alsdann die erhaltene (gerade oder krumme) Durchschnittslinie die gedachte krummlinige Erzeugende schneidet, sind die verlangten Durchschnittspunkte dieser mit der gegebenen Schnittebene.

**56.** Diese Methode, mit der zugleich die allgemeine Aufgabe, die Durchschnittspunkte irgend einer krummen Linie mit einer Ebene im Raume zu bestimmen, gelöst ist, läßt sich indessen in den meisten Fällen und namentlich bei den Umdrehungsflächen (s. II. 1, §. 103 und 104) dadurch vereinfachen, daß man sich eines Systems von Hülfsebenen bedient, deren Durchschnittslinien mit der gegebenen Schnittebene und der gegebenen krummen Fläche sich leicht finden lassen. Die Durchschnittspunkte dieser beiden Durchschnittslinien jeder einzelnen Hülfsebene des Systems liefern dann wieder eine hinreichende Anzahl Punkte der verlangten Durchschnittsfigur.

**57.** Bei den Prismen- und Pyramiden-, Zylinder- und Kegelschnitten wird mit der Konstruktion der Durchschnittsfigur zugleich auch die Bestimmung des Netzes oder der entwickelten Oberfläche verbunden. Die Oberflächen der Prismen und Pyramiden und überhaupt aller Polyeder lassen sich natürlich ohne weiters in eine Ebene ausbreiten.

**58.** Bei krummen Flächen ist dieß jedoch nicht bei allen der Fall. Diese theilen sich hiernach (s. II. 1, §. 108) in zwei Gruppen: in solche, die entwickelbar und in solche, die nichtentwickelbar sind, d. h. in solche, die sich ohne Riß und Falte in eine Ebene ausbreiten lassen, und in solche, bei denen dieß nicht möglich ist. Entwickelbar sind z. B. die Zylinder- und Kegelflächen, bei denen, wie schon

in dem oben angeführten §. der „Elemente" nachgewiesen worden ist, zwei unendlich nahe Lagen der Erzeugenden stets ein ebenes Flächenelement bilden, so daß die einzelnen Elemente nacheinander in die Ebene des ersten Elementes gedreht und somit schließlich in eine Ebene ausgebreitet werden können. Die windschiefen Flächen, sowie die mittelst krummen Linien erzeugten Umdrehungsflächen sind dagegen nicht entwickelbar, weil ihre Flächenelemente, wie ebenfalls schon früher in §. 108 der „Elemente" gezeigt worden ist, keine ebenen, sondern selbst gekrümmte oder gebogene Elemente sind und deßhalb nicht in eine Ebene ausgebreitet werden können.

**59.** Nach diesen allgemeinen Erklärungen über die Durchschnittskonstruktionen der verschiedenen Körperformen mit Ebenen und ihre Entwickelungen werden wir nun nacheinander die Pyramidenschnitte, die Prismenschnitte, die Kegelschnitte, Zylinderschnitte und die Durchschnitte mit Umdrehungs- und windschiefen Flächen im Besondern behandeln.

### a) Pyramidenschnitte.

(Fig. 34—39, Blatt 5—6.)

**60.** Wenn eine Pyramide von einer Ebene geschnitten werden soll, so kann diese durch die Spitze gehen und zugleich die Basis beliebig schneiden, oder sie kann parallel oder schief zur Basis der Pyramide sein. Im ersten Fall ist die Schnittfigur ein Dreieck, im andern eine zur Basis ähnliche Figur, und im letzten Fall kann dieselbe ein beliebiges Vieleck sein, nur muß dieses von derselben Seitenzahl wie die Grundfläche der Pyramide sein.

**61.** Sieht man zugleich auf die Lage der Schnittebene zu den Projektionsebenen, so können folgende drei Hauptfälle eintreten:

1) kann sie zu der einen P. E. parallel und zur andern senkrecht,
2) zu der einen senkrecht und zur andern schief und
3) zu beiden schief sein.

Diese drei Fälle sollen nun speziell behandelt werden.

**62.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer senkrechten regelmäßigen, z. B. sechsseitigen Pyramide, die mit der Grundfläche auf der H. E. aufsteht, sowie der V-Riß einer dieselbe schneidenden horizontalen Ebene gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfigur, sowie das Netz der ganzen und abgekürzten Pyramide finden, Fig. 34—35.

Auflösung. Es seien ABCDEFs, a'b'c'd'e'f's', Fig. 34, die gegebenen Projektionen der Pyramide und P'Q' der V-Riß der sie schneidenden Ebene.

Die Punkte 1', 2', 3', 4', 5', 6', wo der Riß P'Q' die Vertikalprojektionen a's', b's', c's',... der Kanten schneidet, geben unmittelbar die Vertikalprojektion der Schnittfigur. Projicirt man diese Punkte horizontal nach 1, 2, 3, 4... auf die zugehörigen

Horizontalprojektionen As, Bs, Cs, Ds... der Kanten, so ist 1 2 3 4 5 6 die Horizontalprojektion der Schnittfigur, die, da sie zur H. E. parallel ist, nach Früherm (II. 1, §. 71. 2) zugleich die wahre Größe der letztern angibt.

**63.** Was nun im Weitern das Netz der ganzen Pyramide betrifft, Fig. 35, so erhält man dasselbe, wie schon in den Elementen (II. 1, §. 147, Fig. 58 bis 59) gezeigt worden ist, indem man mit a's', einer Kantenprojektion in wahrer Größe, aus irgend einem Punkt S einen Kreisbogen AA beschreibt; die Seite AB in wahrer Größe sechsmal darauf abträgt, die Geraden AS, BS, CS,... zieht und endlich an irgend eine Seite CD die Grundfläche ABCDEF in wahrer Größe beifügt.

Das Netz der abgekürzten Pyramide zu erhalten, beschreibe endlich mit dem Stück 1's' der Kantenprojektion aus S den Kreisbogen I II III... I, ziehe I II, II III,... und trage an irgend eine Seite III IV die wahre Größe der Schnittfläche, d. i. ihre Horizontalprojektion 1 2 3... 6, nach I II III... IV ab.

**64.** Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend einer unregelmäßigen, z. B. fünfseitigen, mit der Grundfläche auf der H. E. aufstehenden Pyramide, sowie die Risse einer zur H. E. schiefen und zur V. E. senkrechten Schnittebene gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfigur, sowie das Netz der ganzen und abgekürzten Pyramide finden, Fig. 36—37.

Auflösung. Es seien (ABCDEs, a'b'c'd'e's') die Projektionen der gegebenen fünfseitigen Pyramide und (PQ, PR') die Risse der gegebenen Schnittebene, Fig. 36.

Die Vertikalprojektion 1'2'3'4'5' der Schnittfigur fällt wiederum mit dem Vertikalriß PR' zusammen, und die Horizontalprojektion 1 2 3 4 5 derselben erhält man, wenn man die Punkte 1', 2',... auf die zugehörigen H-Projektionen As, Bs,... der Kanten projicirt. Da es sich jedoch ereignen könnte, daß von den H-Projektionen der Kanten eine oder zwei zur Achse senkrecht sind, in welchem Falle beim vorigen Verfahren die entsprechenden H-Projektionen der Durchschnittspunkte nicht erhalten werden könnten, weil dieselben von den projicirenden Linien nicht geschnitten würden und da zudem bei schiefer Lage der H-Projektionen der Kanten zur Achse das angedeutete Projektionsverfahren jedenfalls schiefe und daher weniger genaue Schnitte für die gesuchten H-Projektionen der Durchschnittspunkte liefert, so ist es besser, zur Bestimmung dieser die Kanten in eine zur V. E. parallele Lage zu drehen. Die Kante (As, a's') z. B. kommt auf diese Weise nach ($A_1$ s, $a_1$' s') und ihr Durchschnittspunkt (1, 1') nach ($1_1$, $1_1$') zu liegen. Man zieht daher durch 1' die Gerade 1' $1_1$' parallel zur Achse und projicirt $1_1$' horizontal nach $1_1$ auf $A_1$ s und dreht dann $1_1$ wieder aus s nach 1 auf As. Ebenso

verfährt man auch bei den übrigen Punkten (2, 2'), (3, 3') u. s. w. Bei dieser Umdrehung stellen sich die Kanten in der V. E. zugleich in wahrer Größe dar; $a_1's'$, $b_1's'$, ... sind demnach die wahren Größen derselben, sowie auch $1_1's'$, $2_1's_1$, ... die wahre Größe ihrer obern abgeschnittenen Stücke angeben.

Die wahre Größe der Schnittfigur (1 2 3 4 5, 1'2'3'4'5') zu erhalten, lege man dieselbe sammt der Schnittebene in eine der P. E., also entweder in die V. E. oder in die H. E. um. In der Figur 36 sind diese beiden Umlegungen angegeben und zwar ist die Schnittfigur in der V. E. nach I' II' III' IV' V' und in der H. E. nach $I_1$ $II_1$ $III_1$ $IV_1$ $V_1$ umgelegt. Im ersten Fall mache 1' I, 2' II', 3' III' ... senkrecht zu P R' und gleich den Abständen 1 $\alpha$, 2 $\beta$, ... der zugehörigen Horizontalprojektionen von der Achse. Im andern Fall beschreiben die einzelnen Punkte Kreise, die sich in der V. E. als die Bogen 1' $I_1'$, 2' $II_1'$, ... in wahrer Größe und in der H. E. als die Geraden 1 $I_1$, 2 II, ... parallel zur Achse projiciren. Man beschreibe daher aus P mit P 1', P 2', ... Bogen und durch 1, 2, ... mit der Achse die Parallelen 1 $I_1$, 2 $II_1$, ... und projicire endlich $1_1'$ nach $I_1$ und $2_1'$ nach $II_1$ ...) so ist $I_1$ $II_1$ $III_1$ $IV_1$ $V_1$ die in die H. E. umgelegte Schnittebene.

Die wahre Größe der Schnittfläche hätte sich übrigens auch ergeben, wenn man diese bloß in eine zu einer P. E., z. B. zur H. E., parallele Lage gedreht hätte, wie dieß z. B. beim Prismenschnitt der zweitfolgenden Aufgabe (§. 73, Fig. 40) gezeigt werden wird.

**66.** Das Netz der ganzen Pyramide, Fig. 37, findet man, indem man aus den drei Seiten nach einander die Seitendreiecke S A B, S B C, ... konstruirt und an eine beliebige Seite, z. B. an B C, die Grundfläche B C D E A beifügt, wie dieß schon in den „Elementen" an einem Beispiel (II. 1, §. 149, Fig. 62 bis 63) gezeigt worden ist. Und endlich erhält man nun auch das Netz der abgekürzten Pyramide, indem man die wahre Größe s' $1_1'$, s' $2_1'$, ... der abgeschnittenen Kantenstücke aus Fig. 36 nach S I, S II, ... in Fig. 37 und nebstdem noch die wahre Größe I' II' III' IV' V' der Schnittfläche an irgend einer Seite II III abträgt.

**67.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer beliebigen schiefen, z. B. fünfseitigen, Pyramide gegeben, sowie drei Punkte als Durchschnittspunkte dreier beliebiger Seitenkanten derselben mit einer beliebigen, zu beiden P. E. schief gedachten Schnittebene; man soll die übrigen Schnittpunkte der durch die drei gegebenen Punkte bestimmten Schnittebene, sowie die wahre Größe der Schnittfigur und das Netz der ganzen und abgekürzten Pyramide finden, Fig. 38–39.

Auflösung. Es seien (A B C D E s, a' b' c' d' e' s') die gegebenen Projektionen der Pyramide und (1, 1'), (2, 2') und (3, 3') die gegebenen Projektionen der

drei Punkte. Mit diesen drei Punkten ist auch die Lage der Schnittebene selbst bestimmt, und wenn man dieselben durch die Geraden (1 2, 1′ 2′), (1 3, 1′ 3′) und (2 3, 2′ 3′) verbindet, so ist man damit leicht im Stande, die Projektionen der übrigen Durchschnittspunkte zu finden.

Man denke sich, um z. B. den Schnittpunkt (4, 4′) der Kante (D s, d′ s′) mit der gedachten Schnittebene zu erhalten, durch diese Kante eine Hülfsebene, z. B. die vertikal projicirende Ebene, gelegt. Ihr V-Riß fällt dann mit der Vertikalprojektion d′ s′ derselben zusammen und schneidet die Projektionen 1′ 2′ und 1′ 3′ in f′ und g′. Projicirt man diese Punkte horizontal nach f und g auf die zugehörigen Horizontalprojektionen 1 2 und 1 3 und verbindet f mit g, so schneidet diese Verbindungslinie, d. i. die Horizontalprojektion der Durchschnittslinie der v-projicirenden Hülfsebene mit der Schnittlinie, gehörig verlängert, die Horizontalprojektion D s der Kante im Punkt 4, der verlangten Horizontalprojektion. Projicirt man endlich 4 nach 4′ auf die Vertikalprojektion d′ s′ der Kante, so ist 4′ die verlangte Vertikalprojektion des Durchschnittspunktes.

Ebenso findet man auch die Projektionen (5, 5′) der Kante (E s, e′ s′) mit der gedachten Schnittebene. Bei letzterem Punkt ist zur Abwechslung, wie die Figur zeigt, die horizontal projicirende Ebene benutzt worden. Ihr Horizontalriß schneidet die Geraden 1 3, 1 2, 2 3 in h, i, k, welche Punkte, vertikal projicirt, nach h′, i′, k′, auf die zugehörigen Vertikalprojektionen 1′ 3′, 1′ 2′, 2′ 3′ zu liegen kommen, und in der Verbindungslinie h′ i′ k′ die Vertikalprojektion der Schnittlinie der horizontal projicirenden Hülfsebene und der gedachten Schnittebene abgeben, welche die Vertikalprojektion e′ s′ der Kante in 5′, der Vertikalprojektion des Durchschnittspunktes, durchschneidet, womit auch die Horizontalprojektion 5 desselben bestimmt ist.

68. Die wahre Größe der Schnittfigur (1 2 3 4 5, 1′ 2′ 3′ 4′ 5′) zu erhalten, ist es auch hier am einfachsten, die Risse oder doch einen, z. B. den Vertikalriß P′ Q′ der Schnittebene zu bestimmen und die Schnittfigur sammt Ebene um diesen Riß als Drehachse in die V. E. nach $I_2' II_2' III_2' IV_2' V_2'$ umzulegen. Hiebei beschreiben die einzelnen Punkte (1, 1′), (2, 2′), ... Bogen, deren Radien als Hypothenusen $R' I_1'$, $T' II_1'$,... der in die V. E. umgelegten rechtwinkligen Dreiecke $1' R' I_1'$, $2' T' II_1'$,... erscheinen, worin die eine Kathete 1′ R′, 2′ T′,... gleich dem Abstand der V-Projektion 1′, 2′,... vom V-Riß P′ R′ und die andere Kathete $1' I_1'$, $2' II_1'$,... gleich dem Abstand der H-Projektion 1, 2,... von der Achse, also gleich 1 l, 2 m,... ist. Macht man endlich $R' I_2' = R' I_1'$, $T' II_2' = T' II_1'$,... und verbindet die Punkte $I_2'$, $II_2'$,... durch Geraden, so ist $I_2' II_2' III_2' IV_2' V_2'$ die wahre Größe der in die V. E. umgelegten Schnittefigur.

69. Das Netz der ganzen, wie der abgekürzten Pyramide findet man wieder, wie (in §. 66) bereits erklärt worden ist. Man denke sich nämlich die einzelnen Kanten mit ihren Durchschnittspunkten auch hier in eine zur V. E. parallele Lage gedreht und mit ihren Vertikalprojektionen $a_1's'$, $b_1's'$, ..., die ihre wahre Größe angeben, und den Seiten AB, BC, ... in Fig. 39 die aneinander gereihten Dreiecke ABS, BCS, ... beschrieben, die abgeschnittenen Stücke $s'1_1'$, $s'2_1'$, ..., die ebenfalls in wahrer Größe sind, nach SI, SII ... auf die entwickelten Kanten SA, SB, ... abgetragen und an eine beliebige Seite BC des entwickelten Umfangs ABC ... A der Basis, diese nach BCDEA und an eine beliebige Seite II III des Umfangs I II III ... I der entwickelten Schnittfigur diese nach II III IV V I angefügt.

## b. Prismenschnitte.

(Fig. 40—43, Blatt 7—8.)

70. Wenn ein Prisma von einer Ebene geschnitten werden soll, so kann die Schnittebene parallel zu den Kanten, oder parallel oder schief zur Basis sein. Im ersten Falle ist die Schnittfigur ein Parallelogramm, im andern ist sie mit der Grundfläche kongruent und im dritten eine vergrößerte Figur von derselben Seitenzahl wie die Basis.

71. Sieht man auch hier auf die Lage der Schnittebene zu den Projektionsebenen, so kann erstere wieder:

1) parallel zur einen und senkrecht zur andern,
2) senkrecht zur einen und schief zur andern, und
3) schief zu beiden P. E. sein.

Da im ersten Fall eine zur Basis kongruente Figur erhalten wird, so kann derselbe hier füglich übergangen werden. Im Folgenden werden daher nur die beiden andern Fälle speziell behandelt werden.

72. Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend eines senkrechten, z. B. fünfseitigen, Prisma's und die Risse einer zur H. E. schiefen und zur V. E. senkrechten Schnittebene gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfläche, sowie das Netz des ganzen und abgekürzten Prisma's finden, Fig. 40—41.

Auflösung. Es seien (ABCDEfghik, a'b'c'd'e'f'g'h'i'k') die Projektionen des Prisma's und (PQ, PR') die Risse der Schnittebene. Die Projektionen (12345, 1'2'3'4'5') der Schnittfläche sind unmittelbar bestimmt; denn die Horizontalprojektion fällt mit der Basis ABCDE und die Vertikalprojektion mit dem V-Riß PR' der Schnittebene zusammen.

73. Die wahre Größe der Schnittfigur kann man durch Umlegung derselben in eine P. E., z. B. in die V. E., nach I' II' III' IV' V' erhalten, wie dieß bereits oben (§. 65, Fig. 36) erklärt worden ist.

Oder auch durch bloße Drehung derselben in eine

zu einer P. E., z. B. zur H. E., parallele Lage, in welcher sie sich horizontal in wahrer Größe projicirt, und erhalten wird, wenn man $4' 1_1'$ parallel der Achse zieht, aus $4'$ mit $4' 1'$, $4' 2'$,... die Bogen $1' 1_1'$, $2' 2_1'$,... beschreibt, durch 1, 2,... die Parallelen $1\ 1_1$, $2\ 2_1$,... zur Achse zieht, die Punkte $1_1'$, $2_1'$,... auf die letzteren nach $1_1$, $2_1$,... projicirt und diese durch Geraden mit einander verbindet.

**74.** Das ganze Netz des Prisma's, Fig. 41, findet man einfach, indem man eine Gerade A A zieht und darauf AB, BC, CD,..., gleich den Seiten AB, BC, CD,... der Basis in Fig. 40, abträgt, in den Punkten A, B, C,... Senkrechte, gleich der Höhe $a' f'$ des Prisma's, errichtet, F F′ zieht und an zwei beliebige Seiten D E und J K die Basen E D C B A und K J H G F abträgt, wie dieß auch schon in den „Elementen" (II. 1, §. 146, Fig. 56 und 57) gezeigt worden ist.

Das abgekürzte Netz zu finden, mache alsdann noch A I, B II,... in Fig. 41 gleich den Kantenstücken $a' 1'$, $b' 2'$,... in Fig. 40, verbinde die erhaltenen Punkte durch die Geraden I II, II III,... und trage endlich die wahre Größe $1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1\ 5_1$ der Schnittfigur aus Fig. 40 an eine beliebige Seite IV V des Umfangs der entwickelten Schnittfigur nach IV III II I V in Fig. 41 ab.

**75.** Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend eines schiefen, z. B. fünfseitigen, Prisma's, sowie die Risse einer beliebigen schiefen Schnittebene gegeben; man soll die Projektionen der Schnittfigur, ihre wahre Größe und das Netz der ganzen und abgekürzten Pyramide finden, Fig. 42—43.

Auflösung. Es seien (A B C D E f g h i k, $a' b' c' d' e' f' g' h' i' k'$) die Projektionen des gegebenen Prisma's und (P Q, P R′) die Risse der Schnittebene. Die Projektionen der Durchschnittsfigur zu erhalten, suche die Projektionen der Durchschnittspunkte (1, 1′), (2, 2′),... der einzelnen Seitenkanten (A f, $a' f'$), (B g, $b' g'$) mit der Schnittebene (P Q, P R′), wie dieß früher (§. 52 und 54, sowie §. 25—28) erklärt worden ist. Um z. B. die Projektionen (1, 1′) zu finden, denke man sich durch die Kante (A f, a f′) eine Hülfsebene, z. B. die v. p. E. ($a'$ L, $a' f'$), gelegt. Diese schneidet die Schnittebene (P Q, P R′) in der Geraden (L m, $a'$ M′), deren H=Projektion L m die H=Projektion A f der Kante in 1, der H=Projektion des Durchschnittspunktes, schneidet, womit auch die V=Projektion 1′ bestimmt ist. Ebenso erhält man auch die übrigen Durchschnittspunkte (2, 2′), (3, 3′),...

**76.** Die wahre Größe der Schnittfigur findet man auf gleiche Weise, wie oben (§. 68, Fig. 38) bei dem Pyramidenschnitt bereits erklärt worden ist. Man denke sich nämlich die Schnittebene sammt Schnittfigur um einen Riß als Drehachse in eine der P. E., z. B. um den Vertikalriß P R′ in die V. E. nach $I_2'\ II_2'\ III_2'\ IV_2'\ V_2'$, umgelegt (aus Platzmangel ist

diese Umlegung einwärts, statt auswärts ausgeführt worden). Dabei beschreiben die einzelnen Punkte Kreisbogen, deren Radien zu suchen sind. So z. B. beschreibt der Punkt (3, 3′) einen Bogen, dessen Radius T′ $III_1$′ als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks 3′T′$III_1$′ erscheint, in dem die eine Kathete 3′ T′ gleich der Entfernung der Vertikalprojektion 3′ von der Drehachse P R′ und die andere 3′ $III_1$′ gleich dem Abstand 3 w der Horizontalprojektion von der Projektionsachse ist. Beschreibt man daher aus T′ mit T′ $III_1$′ den Bogen $III_1$′ $III_2$′ bis zur verlängerten Senkrechten T′ 3′, so ist $III_2$′ der entsprechende umgelegte Eckpunkt der Schnittfigur. Ebenso findet man die übrigen Punkte $IV_2$′, $V_2$′,..., die man dann noch mit einander zu verbinden hat. Da diese Verbindungslinien aber ganz unsichtbar sind, müssen sie punktirt werden.

**77.** Das Netz des schiefen Prisma's zu finden, denke man sich dasselbe zur Vereinfachung auf eine dritte P. E. oder eine zweite V. E. parallel zu den Kanten projicirt. Der H-Riß dieser Hülfsprojektionsebene sei X′ X′, parallel zu D i, der H-Projektion einer Kante. Projicirt man die Punkte A, B, C,... nach a″, b″, c″,... in die Achse und die Punkte f, g, h,... nach f″, g″, h″,... auf die zur Achse im Abstand $f_2$ f″ = $f_1$ f′ gezogene Parallele f″ h″ und zieht a″ f″, b″ g″, c″ h″,..., so ist a″ b″ c″ d″ e″ f″ g″ h″ i″ k″ die Projektion des Prisma's auf die neue Projektionsebene. Projicirt man ebenso 1, 2, 3,... nach 1″, 2″, 3″,... auf die entsprechenden Kantenprojektionen, so ist 1″ 2″ 3″ 4″ 5″ die Projektion der Schnittfläche auf dieselbe. Da diese dritte Projektionsebene mit den Kanten des Prisma's parallel ist, so projiciren sich diese in a″ f″, b″ g″, c″ h″,... unmittelbar in wahrer Größe; deßgleichen geben auch 1″ a″ und 1″ f″, 2″ b″ und 2″ g″,... die wahre Größe der abgeschnittenen Kantenstücke an.

**78.** Das Netz des ganzen schiefen Prisma's findet sich nun nach dieser Vorbereitung ganz auf dieselbe Weise, wie schon in den „Elementen" (II. 1, §. 68, Fig. 60 und 61) angegeben worden ist, indem man nämlich das schiefe Prisma durch eine Hülfsebene Y X′ Z″, senkrecht zu den Kanten desselben, schneidet (§. 29). Diese Hülfsebene schneidet das Prisma in einer Figur, die in der Umlegung nach $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{D}_1$ $\mathfrak{E}_1$ in die H. E. zu liegen kommt und bei der Entwickelung in Fig. 43 sich als die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ darstellt. Macht man daher $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$,... und errichtet in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,... die entwickelten Kanten A F, B G, C H,... senkrecht zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, macht $\mathfrak{A}$A = a″ a″, $\mathfrak{A}$F = a″ f″, $\mathfrak{B}$B = b″ b″, $\mathfrak{B}$G = b″ g″,..., zieht A B, B C, C D,..., sowie F G, G H, H J,... und trägt die Basen an zwei beliebige Seiten B C und F K der entwickelten Umfänge nach B C D E A und F G H J K, so ist das Netz des ganzen schiefen Prisma's gefunden.

Das abgekürzte Netz zu finden, hat man nun noch AI = a″ 1″, BII = b″ 2″,... zu machen, die erhaltenen Punkte I, II,... zu verbinden und an irgend eine Seite III IV die wahre Größe $I_2'$ $II_2'$ $III_2'$ $IV_2'$ $V_2'$ aus Fig. 42 nach III IV V I II in Fig. 43 abzutragen.

### c. Kegelschnitte.

(Fig. 44—54, Blatt 9—11.)

**79.** Wenn ein senkrechter Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten werden soll, so können, je nach der Lage der Schnittebene, fünferlei Fälle eintreten:

1) Die Schnittebene kann durch die Achse des Kegels gehen, dann ist die Schnittfigur ein Dreieck.
2) Kann sie auf der Achse senkrecht und zur Grundfläche parallel sein. Dann ist die Schnittfigur ein Kreis.
3) Kann sie zur Achse und Basis schief sein und zugleich alle Erzeugenden des Kegels schneiden. Dann ist die Schnittfigur eine Ellipse.
4) Kann sie zur Achse und Basis schief und mit einer Seitenlinie des Kegels parallel sein. Dann ist die Schnittfigur eine Parabel. Endlich
5) kann sie mit der Achse parallel und zur Basis senkrecht sein, aber nicht durch die Spitze gehen. Dann ist die Schnittfigur eine Hyperbel.

**80.** Ist irgend eine Kegelfläche und eine Schnittebene der Lage nach gegeben, und will man wissen, von welcher Gestalt die Schnittfigur sei, so denke man sich durch die Spitze des Kegels eine parallele Hülfsebene gelegt. Je nachdem dann diese Ebene mit dem Kegel nur einen Punkt (die Spitze) gemein hat, oder denselben in einer Geraden (einer Seitenlinie) berührt, oder ihn in zwei Geraden (zwei Erzeugenden) schneidet, ist die Schnittfigur eine Ellipse (resp. ein Kreis), eine Parabel oder eine Hyperbel (resp. ein Dreieck.

Diese verschiedenen Kegelschnitte sollen nun im Folgenden speziell behandelt werden.

**81.** Aufgabe. Kreisschnitt. Es sind die Projektionen eines senkrechten Kreiskegels, der mit der Grundfläche auf der H. E. steht, gegeben, sowie der V-Riß einer zur H. E. parallelen Schnittebene; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfigur und das Netz des ganzen und abgekürzten Kegels finden, Fig. 44—45.

Auflösung. Es seien (A D G K s, a′ g′ s′), Fig. 44, die Projektionen des Kegels und P′ Q′ der Vertikalriß der Schnittebene. Die Schnittfigur ist hier ein Kreis vom Durchmesser 1′ 7′ oder vom Radius 1′ 4′, der sich horizontal unmittelbar als Kreis 1 4 7 10 in wahrer Größe projicirt.

**82.** Das Netz des ganzen Kegels findet man, wie schon in den „Elementen“ (II. 1, §. 161, Fig.

74–75) angegeben worden ist, indem man mit einer Seite a′ s′ des Kegels aus einem Punkt S, Fig. 45, einen Kreisbogen beschreibt und darauf A $\alpha$, d. i. den vierundzwanzigsten Theil des Kreisumfangs in Fig. 44, 24mal abträgt und an einem beliebigen Punkt die Grundfläche berührend beifügt.

Um das Netz des abgekürzten Kegels zu erhalten, Fig. 45, beschreibe dann noch mit s′ 1′ aus S einen Kreisbogen I II III ... I und trage die Schnittfigur 1 4 7 10 aus Fig. 44 an einem beliebigen Punkt VII in Fig. 45 berührend ab.

83. Aufgabe. Ellipsenschnitt. Es sind die Projektionen eines senkrechten Kreiskegels und die Risse einer zur V. E. senkrechten und zur H. E. schiefen Schnittebene gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfigur, sowie das Netz des ganzen und abgekürzten Kegels finden, Fig. 46—47.

Auflösung. Die gegebenen Projektionen des Kegels seien (A B C D G K s, a′ g′ s′) und die Risse der Schnittebene (P Q, P R′). Die V-Projektion 1′ 7′ der Schnittfigur, die hier eine Ellipse ist, fällt mit dem V-Riß P R′ zusammen, und die H-Projektion derselben, die sich selbst als Ellipse darstellt, findet man, wenn man auf dem Kegelmantel eine Reihe von etwa 12 Erzeugungslinien (A s, a′ s′), (B s, b′ s′), ... annimmt und die Durchschnittspunkte 1′, 2′, 3′, ... ihrer V-Projektionen mit dem V-Riß P R′ der Schnittebene auf die zugehörigen Horizontalprojektionen nach 1, 2, 3, ... projicirt und diese Punkte durch eine stetige krumme Linie 1 2 3 4 ... aus freier Hand verbindet.

84. Da man aber bei diesem Verfahren die auf den zur Achse senkrechten Radien D s und K s gelegenen Projektionen 4 und 10 nicht erhalten kann, so denke man sich die entsprechenden Erzeugenden mit den Schnittpunkten in eine zur V. E. parallele Lage, z. B. nach (G s, g′ s′) gedreht. Der Punkt 4′ kommt dabei nach w′ zu liegen, welcher sich horizontal nach w projicirt. Beschreibt man daher mit s w aus s einen Kreisbogen, so wird dieser die Radien D s und K s in 4 und 10, den gesuchten Horizontalprojektionen, durchschneiden. Auf gleiche Weise lassen sich auch die übrigen Punkte 1, 2, 3, ... finden (Vergleiche damit auch das in §. 64 Gesagte).

85. Statt der Erzeugenden (A s, a′ s′), (B s, b′ s′), ... hätte man übrigens auch nur eine Reihe horizontaler Hülfsebenen anwenden können (§. 56). Diese schneiden den Kegel in Kreisen, die sich vertikal als die Geraden $2_1{}'u'$, $3_1{}'v'$, $4_1{}'w'$, ..., parallel zur Achse, und horizontal als Kreise in wahrer Größe vom Durchmesser $2_1 u = 2_1{}' u'$, $3_1 v = 3_1{}' v'$, ... projiciren, und die Schnittebene Q P R′ in Geraden, die sich vertikal als die Punkte 2′, 3′, ... und horizontal als die Geraden $z_2 z_2$, $z_3 z_3$, ..., parallel zum Horizontalriß P Q, darstellen und die zugehörigen Schnittkreise je in zwei Punkten, wie 2 und 12,

3 und 11,..., die der gesuchten Ellipse angehören, durchschneiden. Diese zu erhalten, hat man also nur noch die Punkte 1, 2, 3, 4,... durch eine stetige krumme Linie zu verbinden.

**86.** Die wahre Größe der Schnittfigur (Ellipse) findet man genau so, wie früher bei der Pyramide (§. 65, Fig. 36) erklärt worden ist, also z. B. durch Umlegung derselben in die V. E. Dabei errichte in 1′, 2′, 3′,... Senkrechte auf den V-Riß P R′ und mache sie gleich den Abständen der zugehörigen Horizontalprojektionen von der Achse, also $1'\,I' = 1\,z_1$, $2'\,II' = 2\,z_2$, $2'\,XII' = 12\,z_2$,... und verbinde die erhaltenen Punkte I′, II′, III′,... durch eine stetige Kurve, so ist dieß die verlangte wahre Größe der elliptischen Schnittfigur.

**87.** Erwägt man, daß $I'\,VII' = 1'\,7'$ die große Achse der Ellipse, so ist, wenn man 1′ 7′ in n′ und 1 7 in n halbirt und durch erstern Punkt $n_1'\,n_2'$ parallel und durch letztern $n_1\,n_2$ senkrecht zur Achse zieht, $n_1'\,n_2' = n_1\,n_2$ offenbar die kleine Achse $N_1'\,N_2'$ der gesuchten Ellipse $I'\,N_1'\,VII'\,N'_2$. Macht man daher $I'\,VII' = 1'\,7'$, gleich der großen Achse, und $N_1'\,N_2' = n_1\,n_2 = n_1'\,n_2'$, gleich der kleinen Achse, so kann nach Früherem (I. §. 132—134, Fig. 75—76) die wahre Größe der Ellipse $I\,N_1'\,VII'\,N_2'$ auch aus diesen beiden Achsen konstruirt werden.

**88.** Das Netz des ganzen Kegels, Fig. 47, findet man, wie oben (§. 82) angegeben worden ist. Und um das abgekürzte Netz zu finden, ziehe vor Allem die entwickelten Erzeugenden A S, B S, C S,..., trage darauf die wahre Größe $a'\,1'$, $a'\,2_1'$, $a'\,3_1'$,... ihrer abgeschnittenen Stücke aus Fig. 46 nach A I, B II, C III,... in Fig. 47 ab und verbinde die erhaltenen Punkte I, II, III,... durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand. Zur Vervollständigung trägt man endlich auch noch die wahre Größe der Schnittfigur aus Fig. 46 an einen beliebigen Punkt VII der entwickelten Schnittkurve in Fig. 47 ab.

**89.** Aufgabe. Parabelschnitt. Es sind die Projektionen eines senkrechten Kreiskegels und die Risse einer Ebene, die zu einer Erzeugungslinie parallel und zugleich zur V. E. senkrecht und zur H. E. schief ist, gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe dieses Kegelschnitts, sowie das Netz des abgeschnittenen Kegelstückes finden, Fig. 48—49.

Auflösung. (A B C D G K s, a′ g′ s′) seien die Projektionen des Kegels und (P Q, P R′) die Risse der Schnittebene, die zu (G s, g′ s′) parallel ist. Die Schnittfigur ist im vorliegenden Falle eine Parabel, deren Projektionen (1 5 9, 1′ 5′) und wahre Größe I′ V′ IX′ wie beim Ellipsenschnitt (§. 83—86, Fig. 46) gefunden werden. Dabei kann man sich, wie dort der Erzeugenden (A s, a′ s′), (B s, b′ s′), (C s, c′ s′),... und der horizontalen Schnitte (t 2 u 8, t′ u′), (v 3 w 7, v′ w′),..., oder auch nur der letztern be-

dienen. Im letztern Falle werden die horizontalen Hülfsebenen, wie z. B. v′ w′, beliebig angenommen, w′ nach w projicirt, mit s w aus s ein Kreis beschrieben und durch 3′ die Projicirende 3′ 3 gezogen, welche den vorigen Kreis in den beiden Punkten 3 und 7, den gesuchten Horizontalprojektionen, durchschneidet.

Denkt man sich die Schnittebene sammt Schnittfigur in die V. E. umgelegt, so hat man nur 1′ I′, 2′ II′, ... senkrecht zu P R′ zu ziehen, und 1′ I′ = 1′ 1, 1′ IX′ = 1′ 9, 2′ II′ = d′ 2, 2′ VIII′ = d′ 8, ... zu machen und die erhaltenen Punkte I′, II′, III′, ... durch eine stetige Curve zu verbinden; oder, was auf dasselbe herauskommt, P N′ = P n zu machen, N′ V′ parallel P R′ zu ziehen und die halbe Breite n 1 = n 9 von N′ nach N′ I′ = N′ IX′, s 2 = s 8 von z′ nach z′ II′ = z′ VIII′, ... abzutragen.

**90.** Auch das Netz des abgeschnittenen Kegelstückes (s G 9 5 1, s′ g′ 9′ 5′) findet man, wie beim Ellipsenschnitt (§. 88) angedeutet worden ist, indem man nämlich mit der Seite s′ a′ in Fig. 48 aus S in Fig. 49 einen Bogen G A G beschreibt und darauf $^1/_{24}$ der Kreisperipherie G F E D A K G 24 mal abträgt, sodann die entwickelten Erzeugenden D S, C S, B S, ... zieht, $S II_1 = s' u'$, $S III_1 = s' w'$, $S IV_1 = s' y'$, $S V_1 = s' 5'$, ... macht und die erhaltenen Punkte durch eine stetige Curve verbindet, ferner $V_1 z = V' z'$, $V_1 \alpha = V' \alpha'$, ... macht, $z' II' = z' VIII'$, $\alpha' III' = \alpha' VII'$, ... nach $z II_2 = z VIII_2$, $\alpha III_2 = \alpha VII_2$, ... abträgt und die erhaltenen Punkte stetig verbindet, und endlich A O = n s macht und mit dem Radius A s (Fig. 48) aus O den Kreisbogen $I_2 G IX_2$ zieht, womit auch die mitentwickelte Schnittfläche und Basis des Kegelstücks gefunden ist.

**91.** Aufgabe. Hyperbelschnitt. Es sind die Projektionen eines senkrechten, kreisförmigen Doppelkegels und die Risse einer Schnittebene, die zur Kegelachse parallel und zugleich zu beiden P. E. senkrecht ist, gegeben; man soll die wahre Größe der Schnittfigur, die unter dieser Voraussetzung eine Hyperbel ist, sowie das Netz des abgeschnittenen Kegelstückes finden, Fig. 50—51.

Auflösung. (s A D G K, a′ g′ s′ x′ y′) seien die Projektionen des Kegels und (P Q, P R′) die Risse der Schnittebene, die mit der Kegelachse (s, d′ s′ z′) parallel ist. Die Projektion der Schnittfigur fällt in dieser Lage mit den Rissen der Schnittebene zusammen und zwar horizontal als das Stück 1 7, gleich der Breite, und vertikal als das Stück 1′ 4′, gleich der Höhe eines Hyperbelastes.

**92.** Die wahre Größe der Schnittfigur zu finden, denke man sich wieder die Schnittebene sammt derselben in die V. E. umgedreht. Dabei beschreiben die einzelnen Punkte Bogen, die sich in der H. E. als die Bogen 1 I′, $2 II_1'$, 4 α′, 7 VII′, ... in wahrer Größe und in der V. E. als die Geraden 1′ I′, 2′ II′, 3′ III′, 4′ IV′ ... parallel zur Projektionsachse pro-

jiciren; und zieht man dann noch die Senkrechten, wie $II_1'$ $II'$, so erhält man die Hyperbelpunkte $I'$, $II'$, $III'$, $IV'$,..., die man endlich noch durch eine stetige krumme Linie zu verbinden hat.

Denkt man sich in dieser Umdrehung den Kegel zugleich mit projicirt, so bilden die Kegelseiten $D_1' s_1'$, $K_1' s_1'$ die Asymptoten an die beiden Hyperbeläste (I. §. 144, Fig. 83).

**93.** Das Netz des abgeschnittenen Kegelstücks (s A 1 7, s' a' 1' 7'...) zu finden, verfahre man wieder, wie in den beiden vorigen Aufgaben (§. 88 und §. 90). Man beschreibe daher vor Allem aus S in Fig. 51 mit S A = s' a' einen Kreisbogen und bestimme die Ausschnitte S A G A und S Y X Y als Entwickelungen der beiden Hälften des ganzen Doppelkegels, ziehe dann die entwickelten Erzeugenden E S, F S,... und mache $S\,II_1 = s'u'$, $S\,III_1 = s'w'$,... und verbinde die erhaltenen Punkte $I_1$, $II_1$, $III_1$,... durch eine stetige Kurve aus freier Hand. Endlich trage an den beliebigen Punkt $IV_1$ die wahre Größe der Schnittfigur $I'\,II'\,III'\,IV' \ldots VII'$ nebst dem entsprechenden Stück 1 A 7 der Grundfläche aus Fig. 50 nach $I_2\,II_2\,III_2\,IV_2 \ldots VII_2$ und $I_2\,A\,VII_2$ in Fig. 51 ab, indem man $IV_1\alpha = IV'\alpha_1$, $\alpha I_2 = \alpha VII_2 = \alpha' I' = \alpha' VII'$, $IV_1\beta = IV'\beta'$, $\beta II_2 = \beta' II'$,..., $\alpha O_1 = s4$ und $O_1 A = s A$ macht.

**94.** Aufgabe. Sphärischer Kegelschnitt. Es sind die Projektionen eines beliebigen schiefen Kegels gegeben; man soll das Netz oder die Entwickelung seiner Oberfläche finden, Fig. 52—54.

Auflösung. Es seien (A B C F H s, a' f' s'), Fig. 52, die Projektionen des schiefen Kegels, dessen entwickelte Oberfläche gefunden werden soll. Da der Umfang der Basis, und selbst wenn er ein Kreis ist, sich bei der Entwickelung in eine ganz unbekannte Kurve A B C D E... A, Fig. 54, verwandelt, so ist das in den vorigen Beispielen in Betreff des senkrechten Kegels gezeigte Verfahren hier beim schiefen Kegel nicht mehr anwendbar. Auch läßt sich dieser durch keine Ebene so schneiden, daß alle abgeschnittenen Stücke der Erzeugenden einander gleich wären, das abgeschnittene Kegelstück sich also in einen Kreisausschnitt entwickeln ließe. Dieß ist dagegen möglich mittelst eines sphärischen Kegelschnittes, d. h. mittelst des Schnittes einer Kugel, deren Mittelpunkt mit der Spitze (s, s') des Kegels zusammenfällt.

Man beschreibe daher in Fig. 52 mit irgend einem Radius aus s' den Bogen m' n' als Vertikalprojektion der gedachten Kugel, deren Durchschnitt mit dem Kegel nun vor Allem zu suchen ist. Dazu nehme auf dem Kegelmantel eine Reihe von Erzeugenden (A s, a' s'), (B s, B' s'), (C s, c' s'),... an und drehe sie in eine zur V. E. parallele Lage ($A_1$ s, $a_1'$ s'), ($B_1$ s, $b_1'$ s'), ($C_1$ s, $c_1'$ s'),..., in welcher die V-Projektionen sich in wahrer Größe projiciren und den Bogen m' n' zugleich in den Punkten $I_1'$, $II_1'$, $III_1'$,... durchschneiden. Denkt man sich hierauf die Erzeugenden

sammt den Schnittpunkten mit der Kugelfläche, wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht, so beschreiben die letzteren Kreisbogen, die sich in der H. E. als Kreisbogen in wahrer Größe und in der V. E. als Parallelen zur Achse projiciren. Zieht man daher $I_1'1'$, $II_1'2'$, ... parallel und $I_1'I_1$, $II_1'II_1$, ... senkrecht zur Achse nnd beschreibt mit $s I_1$, $s II_1$, ... aus s die Bogen $I_1 1$, $II_1 2$, ..., so sind (1, 1'), (2, 2'), ... die Projektionen der Durchschnittspunkte der angenommenen Erzeugenden des Kegels mit der gedachten Kugelfläche, und verbindet man dieselben durch eine stetige Kurve, so erhält man auch die Projektionen (1 2 3 4..., 1' 2' 3' 4'...) des sphärischen Schnittes selbst.

**95.** Da die Schnittfigur der Hülfskugel mit dem Kegel weder eine Ellipse, noch irgend eine andere ebene Kurve ist [1], so läßt sie sich auch nicht in wahrer Größe und Gestalt auf einer Projektionsebene darstellen. Zur Entwickelung des Kegelmantels ist sie selbst aber auch nicht nöthig; wohl aber muß hiezu die wahre Länge ihres Umfangs bekannt sein.

Diese findet man mittelst der zugehörigen horizontalprojicirenden Fläche, wie folgt. Es ist dieß (nach II. 1, §. 61) eine zur H. E. senkrechte Zylinderfläche, deren Basis die H-Projektion 1 2 3 4 ... 10 der Schnittfläche ist und deren Erzeugende den v. p. Linien l' 1', m' 2', n' 3', ... gleich sind und die folglich oben von der Schnittkurve begrenzt wird. Um die wahre Länge dieser zu erhalten, hat man also nur diese h. p. Zylinderfläche zu entwickeln, wie dieß bereits früher in den „Elementen" (II. 1, §. 160) gezeigt worden ist. Man ziehe daher eine Gerade 1 1, Fig. 53, trage darauf die Bogentheile 1 2, 2 3, 3 4, ... der H-Projektion 1 2 3 4 ... 10 aus Fig. 52 ab, errichte in den Punkten 1, 2, 3, ... die Senkrechten 1 I = 1' l', 2 II = 2' m', 3 III = 3' n', ... und verbinde ihre Endpunkte I, II, III, ... durch eine stetige Kurve I II III ... I aus freier Hand, so gibt diese die wahre Länge der sphärischen Schnittkurve an.

**96.** Das Netz des schiefen Kegelmantels ergibt sich nun folgendermaßen:

Man beschreibe mit $s' I_1'$, dem Radius der Hülfskugel, aus S, Fig. 54, einen Kreisbogen I I und trage darauf die Stücke I II, II III, ... aus Fig. 53 ab.

---

[1] Die Kugelfläche und die Kegelfläche sind *Flächen zweiter Ordnung*, weil ihre *Gleichungen vom zweiten Grad*, und ihre Durchschnittskurven mit Ebenen sind *Linien zweiter Ordnung*, weil ihre *Gleichungen* ebenfalls vom *zweiten Grade* sind (s. II. 1, §. 108). Schneiden sich zwei solche Flächen zweiter Ordnung, so ist ihre Durchschnittskurve im Allgemeinen eine Linie *vierter Ordnung*, eben weil ihre Gleichungen durch Combination im Allgemeinen auf eine Gleichung vom *vierten Grade* führen. Solche Linien, wie (1 2 3 4..., 1' 2' 3' 4'...) in Fig. 52, sind gewundene Kurven und können darum niemals in einer Ebene liegen und in einer solchen in wahrer Größe und Gestalt dargestellt werden.

Der Kreisbogen I II III ... I stellt dann die entwickelte sphärische Schnittkurve und der Kreisausschnitt S I IV I das entwickelte abgeschnittene obere Stück des Kegels dar.

Zieht man endlich durch die Punkte I, II, III, ... die Geraden SA, SB, SC, ..., gehörig verlängert, macht $SA = s'a_1'$, $SB = s'b_1'$, $SC = s'c_1'$, ... und verbindet die erhaltenen Punkte A, B, C, ... durch eine stetige Kurve aus freier Hand, so erhält man in ABC...A den entwickelten Umfang der Basis und in SABC....A die Entwickelung des ganzen schiefen Kegelmantels selbst, dem man schließlich noch die Grundfläche an einen beliebigen Punkt E berührend anzufügen hat, um die entwickelte Oberfläche des ganzen schiefen Kegels zu erhalten.

### d. Zylinderschnitte.

(Fig. 55—56, Blatt 12.)

**97.** Wenn ein Zylinder durch eine Ebene geschnitten werden soll, so kann die Schnittebene

1) zur Achse oder den Erzeugenden parallel,
2) zur Grundfläche oder der Leitenden parallel und
3) zur Grundfläche oder den Erzeugenden schief sein.

Im ersten Falle ist die Schnittfigur im Allgemeinen ein Parallelogramm, im andern eine der Grundfläche congruente und im letzten eine gegen die Grundfläche vergrößerte Figur.

Ist der Zylinder jedoch ein senkrechter Kreiszylinder, so ist der Schnitt im ersten Falle ein Rechteck, im andern ein Kreis und im dritten eine Ellipse.

**98.** Was die Konstruktion dieser Zylinderschnitte betrifft, so bietet sie keinerlei Schwierigkeit dar, indem sie ganz wie bei den Prismenschnitten auszuführen ist.

Wäre demnach die Aufgabe gegeben, den Schnitt eines senkrechten Zylinders mit einer zur V. E. senkrechten und zur H. E. schiefen Ebene zu finden, so würde sie genau wie die entsprechende Aufgabe über das Prisma (§. 72, Fig. 34—35) gelöst werden. Und wäre die Aufgabe gegeben, den Schnitt eines beliebigen schiefen Zylinders mit einer beliebig schiefen Ebene zu suchen, so verfahre man ebenso, wie bei der entsprechenden Aufgabe des Prisma's (§. 75, Fig. 42 bis 43).

Zur Uebung werden wir indessen die Aufgabe über die Entwickelung eines schiefen Zylinders noch besonders behandeln.

**99.** Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend eines schiefen Zylinders gegeben; man soll das Netz oder die entwickelte Oberfläche desselben finden, Fig. 55—56.

Auflösung. Es seien ($A_1 E_1 J_1 N_1$ $a_2 e_2 i_2 n_2$, $a' e' i' n'$ $A_2' E_2' J_2' N_2'$), Fig. 55, die Projektionen des Zylinders, der, wie man sieht, von den beiden P. E. geschnitten wird, daher die beiden Endflächen $A_1 E_1 J_1 N_1$ und $A_2' E_2' J_2' N_2'$, als Schnittflächen mit der H. E. und V. E., unmittelbar in

wahrer Größe gegeben sind. Diese beiden Grundflächen bilden zugleich zwei beliebig schiefe Schnitte des Zylinders mit den Projektionsebenen. Deßhalb und namentlich auch deßwegen, um die Figur nicht zu sehr zu überladen, wurde hier von einem weitern Schnitt mit einer beliebig schiefen Ebene im Raume abgesehen.

Statt der vollständigen Projektion des Zylinders würden indessen auch schon die Projektionen der Grundfläche, resp. der Leitlinie, und die Projektionen einer Lage der Erzeugenden desselben genügen, indem sich damit die erstern finden ließen. Denn wären z. B. die Projektionen ($A_1 E_1 J_1 N_1$, $a' e' i' n'$) als Projektionen der Grundfläche und ($A_1 a_2$, $a' A_2'$) als Projektionen einer Lage der Erzeugenden gegeben, so ziehe mit $A_1 a_2$ durch $B_1$, $C_1$, $D_1$, ... die Parallelen $B_1 b_2$, $C_1 c_2$, $D_1 d_2$ ... und mit $a' A_2'$ durch $b'$, $c'$, $d'$, ... die Parallelen $b' B_2'$, $c' C_2'$, $d' D_2'$, ..., sowie durch $b_2$, $c_2$, $d_2$, ... die Senkrechten $b_2 B_2'$, $c_2 C_2'$, $d_2 D_2'$, ... zur Achse, welche die letzteren Parallelen in den Punkten $B_2'$, $C_2'$, $D_2'$, ... durchschneiden, womit die Projektionen des Zylinders bestimmt sind.

**100.** Das Netz oder die entwickelte Oberfläche des Zylinders zu erhalten, nehme man wieder, wie oben beim schiefen Prisma (§. 75, Fig. 42 – 43), eine dritte Projektionsebene parallel zu den Erzeugenden desselben an, so daß sich diese, auf jene projicirt, in wahrer Größe darstellen. Ebenso schneide man den Zylinder durch eine Ebene (P Q, P R″) senkrecht zu den Erzeugenden und suche die H-Projektion 1 2 3 4 7 ... und damit auch die erste V-Projektion 1′ 2′ 3′ 4′ 7′ ..., sowie durch Umlegung in die H. E. die wahre Größe $I_1 II_1 III_1 IV_1 VII_1$ ... der Schnittfigur. Ziehe hierauf eine Gerade I I, Fig. 56, und trage darauf die Stücke $I_1 II_1$, $II_1 III_1$, $III_1 IV_1$, ... nach I II, II III, III IV, ... ab; errichte in I, II, III, IV, ... Senkrechte und mache $I A_1 = 1'' a_1''$, $I A_2 = 1'' a_2''$, $II B_1 = 2'' b_1''$, $II B_2 = 2'' b_2''$, ..., so erhält man endlich, wenn man noch die erhaltenen Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, ..., resp. $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, ... durch eine stetige Linie aus freier Hand verbindet, den entwickelten Mantel des gegebenen schiefen Zylinders, dem man schließlich noch die beiden Basen $A_1 E_1 J_1 N_1$ und $A_2' E_2' J_2' N_2'$ berührend beizufügen hat.

Endlich zeigt die Figur 56 in der doppelten Schraffur auch noch das entwickelte Netz des durch den senkrechten Schnitt abgekürzten Zylinders, wobei bloß zu bemerken, daß die senkrechte Schnittfläche in wahrer Größe $I_1 II_1 III_1 IV_1$ ... aus Fig. 55 an einen beliebigen Punkt VII des entwickelten senkrechten Schnittes I I in Fig. 56 nach VII VI V IV III II I beizufügen ist.

**101.** Zur Uebertragung der schiefen Ellipse $A_2 E_2 J_2 N_2$ in Fig. 56 aus Fig. 55 bedient man sich mit Vortheil der c o n j u g i r t e n oder b e i g e o r d n e t e n

Durchmesser. Es sind dieß zwei zugehörige Durchmesser von der Beschaffenheit, daß jeder von ihnen die Sehnen, die zum andern parallel sind, halbirt, eine Eigenschaft, die natürlich auch für die große und kleine Achse und überhaupt für je zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises gilt, von dem die Ellipse als schiefe Projektion anzusehen ist.

Da nun in Fig. 55 die Ellipse $A_2' E_2' J_2' N_2'$ als schiefe Projektion des Kreises $A_1 E_1 J_1 N_1$ von der H. E. auf die V. E. nach der schiefen Projektionsrichtung ($A_1 a_2$, $a' A_2'$) betrachtet werden kann, so werden irgend zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse auch als schiefe Projektionen zweier auf einander senkrecht stehender Durchmesser des Kreises angesehen werden können. Nehmen wir als solche z. B. die senkrechten Durchmesser $A_1 J_1$ und $E_1 N_1$ des Kreises an, so geben diese in der Ellipse die zugehörigen Durchmesser $A_2' J_2'$ und $E_2' N_2'$, die sich in $O_2'$ durchschneiden.

Dieß vorausgesetzt, so ziehe an irgend einen Punkt $J_2$ der Entwicklung (Fig. 56) eine Gerade $J_2 A_2$ und mache $O_2 J_2 = O_2 A_2 = O_2' J_2'$ und $\measuredangle E_2 O_2 J_2 = E_2' O_2' J_2' = \alpha$, sowie $O_2 \beta = O_2' \beta'$, $O_2 \gamma = O_2' \gamma'$, ... und $\beta H_2 = \beta B_2 = \beta' H_2' = \beta' B_2'$, $\gamma G_2 = \gamma C_2 = \gamma' G_2' = \gamma' C_2'$, ..., so sind $J_2$ und $A_2$, $H_2$ und $B_2$, $G_2$ und $C_2$, ... Punkte der übergetragenen Ellipse, womit diese bestimmt ist und erhalten wird, wenn man jene Punkte durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand verbindet.

### e. Durchschnitte mit Umdrehungs- und windschiefen Flächen.

(Fig. 79—80, Blatt 20.)

**102.** Durchschnitte mit Umdrehungs- und windschiefen Flächen sind uns hier nicht mehr ganz neu, indem wir einzelne solcher Schnitte schon früher in den „Elementen" ausgeführt und angewendet haben. So wurde das Drehungsellipsoid, um die Projektionen der Erzeugenden, also der Meridiankreise, in verschiedenen Lagen zu erhalten, durch eine Reihe von Ebenen senkrecht zur Drehachse, oder also von Parallelkreisen geschnitten (II. 1, §. 116, Fig. 43). Dasselbe geschah auch bei der Kugel, welche zur Entwickelung ihrer Oberfläche einmal durch eine Reihe von Meridiankreisen (II. 1, §. 163, Fig. 76), ein andermal durch eine Reihe von Parallelkreisen (II. 1, §. 164, Fig. 77) geschnitten worden ist und welche wir in zwei weitern Figuren (II. 1, §. 165, Fig. 78 und 79) mit einer Anzahl von Meridian- und Parallelkreisen bei schiefer Lage der Drehachse dargestellt haben.

Ebenso wurde das hyperbolische Paraboloid schon früher (II. 1, §. 117, Fig. 44) durch eine zur H. E. senkrechte Ebene geschnitten und die krummlinige Vertikalprojektion e′f′g′h′l′r′ mittelst der Erzeugenden (a c, a′c′), (1 1, 1′ 1′), (2 2, 2′ 2′), ... bestimmt, indem man die H-Projektionen e, f, g, ... ihrer Durchschnitte mit der Schnittebene vertikal nach

e', f', g',... projicirte und die erhaltenen Punkte durch eine stetige Kurve aus freier Hand verband. Wollte man in diesem Fall auch die wahre Größe der Schnittfläche (e f g h l r, e'f'g'h'l'r'), so erhielte man dieselbe am einfachsten durch Umlegung derselben sammt Schnittebene in die H. E. oder durch Umdrehung derselben in eine zur V. E. parallele Lage, wie dieß im Vorigen an verschiedenen Beispielen, so z. B. beim Pyramidenschnitt (§. 65, Fig. 36) oder beim Kegelschnitt (§. 91, Fig. 50) ausgeführt worden ist.

**103.** In den angeführten Beispielen der vorigen Nummer ist die Aufgabe über den Durchschnitt einer Umdrehungs- oder windschiefen Fläche jedoch noch nicht in ihrer Allgemeinheit gelöst. Dazu dienen die folgenden Aufgaben, in welchen die Schnittebene zu der Drehachse oder den Erzeugenden eine beliebig schiefe Lage hat.

Die Methode der Auflösung besteht hiebei, wie bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitt (§. 56) angedeutet wurde, darin, daß man die gegebene krumme Fläche sammt Schnittebene durch eine Reihe zur Drehachse senkrechter Hülfsebenen schneidet und die Durchschnittslinien dieser mit jener sucht. Jede dieser Hülfsebenen schneidet nämlich die Rotationsfläche in einem Kreis und die Schnittebene in einer Geraden, und die Punkte, worin diese jenen durchschneidet, gehören dann der verlangten Durchschnittskurve an.

**104.** Bei diesen Aufgaben reduzirt sich die Konstruktion auf die Bestimmung der Projektionen und wahren Größe der Schnittfigur. Denn von einer Netzebestimmung oder einer Entwickelung der Oberfläche kann hier, wie ebenfalls schon oben (§. 58) angedeutet worden ist, nicht die Rede sein, da diese krummen Flächen nicht entwickelbar sind, d. h. sich nicht ohne Riß und Falte in eine Ebene ausbreiten lassen, weil auch zwei unendlich nahe Lagen der Erzeugenden niemals ein ebenes, sondern immer ein gekrümmtes, ein windisches und gebogenes Flächenelement bilden.

**105.** Aufgabe. Es sind die Projektionen irgend einer Umdrehungsfläche, z. B. des kreisrunden Paraboloids, und die Risse einer dasselbe schneidenden, zu beiden Projektionsebenen schiefen Ebene gegeben; man soll die Projektionen und die wahre Größe der Schnittfläche finden, Fig. 79.

Auflösung. Es seien A B C D o, a'b'c'd'$o_2$' die gegebenen Projektionen des Paraboloids, dessen Drehachse (o, $o_1$'$o_2$') zur Vereinfachung der Konstruktion senkrecht zur H. E. angenommen, und (P Q, P R') die Risse der Schnittebene, die zu beiden P. E. beliebig schief ist.

Die Projektionen der Schnittfigur zu erhalten, schneide das Paraboloid sammt Schnittebene durch eine Reihe horizontaler, zur Drehachse senkrechter Hülfsebenen. E'F' sei der V-Riß einer solchen. Diese schneidet die Schnittebene (n. §. 19, Fig. 13) in der Geraden (e f, E'F') und das Paraboloid in dem Kreis

vom Durchmesser (g h, g' h') oder vom Radius (i h, i' h'). Die Punkte (k, k') und (l, l'), worin dieser von jener durchschnitten wird, sind dann zwei Punkte der gesuchten Durchschnittslinie (M k s l N, m' k' s' l' n'). Auf gleiche Weise werden beliebig viele andere Punkte derselben bestimmt.

**106.** Eine besondere Erklärung verlangt noch die Bestimmung des höchsten Punktes oder des Scheitels der Schnittkurve. Zu diesem Behufe denke man sich das Paraboloid durch eine Hülfsebene T U, senkrecht zur Schnittebene P Q R' und der H. E., und zugleich durch die Drehachse (o, $o_1'$ $o_2'$) gehend, geschnitten. Diese Hülfsebene wird dann die Schnittfläche in einer Geraden (T s, t' s') und die Schnittkurve in dem höchsten Punkte (s, s') schneiden. Die Horizontalprojektion s desselben ist dann sofort bestimmt durch den Schnittpunkt des Horizontalrisses T U der Hülfsebene mit der Horizontalprojektion M k s l N der Schnittkurve; und die Vertikalprojektion s' ergibt sich einfach dadurch, daß man durch s mit P Q die Parallele s w und w W' senkrecht zur Achse, sodann W' V' parallel zur Achse zieht und auf letztere s nach s' projicirt.

Zur Probe kann man auch noch folgende zweite Konstruktion merken. Man denke sich die Schnittlinie (T s, t' s') der Hülfsebene mit der Schnittebene in eine zur V. E. parallele Lage gedreht, wobei die H-Projektion o T nach o $T_1$ und o s nach o $s_1$ parallel zur Achse und die V-Projektion t' s' nach $t_1'$ $s_1'$ zu liegen kommt. Letztere schneidet dann den vertikalen Umriß a' $o_2'$ c' des Paraboloids in $s_1'$. Zieht man dann durch $s_1'$ mit der Achse die Parallele $s_1'$ W' und projicirt s nach s' auf dieselbe, so ist s' ebenfalls die verlangte Vertikalprojektion des höchsten Punktes der Schnittkurve.

Im letzten Fall kann die Konstruktion auch noch dadurch abgeändert werden, daß man, nachdem der Punkt (T, t') nach ($T_1$, $t_1'$) gedreht worden ist, in $t_1'$ an die Achse den horizontalen Neigungswinkel $o T S_1 = l X L_1 = \alpha$ abträgt. Der Schenkel $t_1'$ $s_1'$ schneidet dann den vertikalen Umriß a' $o_2'$ c' des Paraboloids in $s_1'$, wodurch wieder $s_1'$ W' parallel zur Achse gezogen und darauf s nach s' projicirt werden kann. Sollen die Projektionen des höchsten Punktes unabhängig von der Horizontalprojektion der Schnittkurve gefunden werden, so projicire $s_1'$ nach $s_1$, drehe $s_1$ nach s und projicire dann s auf die durch $s_1'$ mit der Achse parallel gezogene $s_1'$ W' nach s', so sind (s, s') die verlangten Projektionen.

**107.** Die wahre Größe der Schnittfigur zu erhalten, lege man dieselbe, sammt Schnittebene, in die H. E. nach M $K_2$ $S_2$ $L_2$ N um. Hiebei beschreiben die einzelnen Punkte Kreisbogen, senkrecht zu P Q, deren Radien als Hypothenusen rechtwinkliger Dreiecke erscheinen, in welchen die Katheten bekannt sind. Der Punkt (l, l') beschreibt z. B. einen Kreisbogen, dessen Radius die Hypothenuse X $L_1$ eines rechtwinkligen

Dreiecks ist, worin die eine Kathete $1X$ der Abstand der H-Projektion $1$ von dem Riß $PQ$ und die andere Kathete $1L_1 = l_1 l' = eE'$ die Höhe des betreffenden Punktes ist. Beschreibt man daher aus $X$ mit $XL_1$ den Kreisbogen $L_1 L_2$, welcher die verlängerte Senkrechte $X1$ in $L_2$ schneidet, so ist $L_2$ ein Punkt der umgelegten Schnittfigur. Auf gleiche Weise findet man beliebig viele andere Punkte derselben.

**108.** Aufgabe. Es sind die Projektionen des windschiefen einmanteligen Hyperboloids, sowie die Risse einer dasselbe schneidenden, zur V. E. senkrechten und zur H. E. schiefen Ebene gegeben; man soll die Projektionen und wahre Größe der Schnittfigur finden, Fig. 80.

Auflösung. Es seien $A_1 B_1 C_1 D_1 e f g h$, $a_1' e' a_2' c_1' g' c_2'$ die Projektionen des Hyperboloids, dessen Drehachse $(o, o_1' o_2')$ senkrecht zur H. E., und $(PQ, PR')$ die Risse der zur V. E. senkrechten und zur H. E. schiefen Schnittebene. Je nach der Lage dieser Ebene kann die Schnittfigur eine Ellipse, eine Parabel oder Hyperbel sein. Und es gibt auch hier ein leichtes Mittel, zu erkennen, welche dieser drei Kurven in jedem einzelnen Fall erhalten werden muß. Denkt man sich an die Hyberbel $a_1' e' a_2' c_1' g' c_2'$ die Asymptoten $l_1' k_1'$, $l_2' k_2'$ gezogen (I., §. 144, Fig. 83) oder durch den Mittelpunkt $(i, i')$ mit den Erzeugenden $(K_1 l_1, k_1' l_1')$ und $(k_2 L_2, k_2' l_2')$ eines Punkts $(h, h')$ Parallelen gelegt, so beschreiben diese bei der Umdrehung um die Querachse $o_1' o_2'$ einen Kegel, den man den asymptotischen Kegel des einmanteligen Umdrehungshyperboloids nennt. Diese beiden Flächen stehen nun in solcher Beziehung zu einander, daß einer jeden Erzeugenden auf der einen eine parallele Erzeugende auf der anderen entspricht. In Folge dessen gelten darum auch für die Schnitte des Hyperboloids dieselben Kennzeichen, wie für die Schnitte des zugehörigen asymptotischen Kegels, welche wir bereits oben (§. 80) angegeben haben. Denkt man sich daher durch den Scheitel $(i, i')$ dieses Hülfskegels eine mit der Schnittebene parallele Hülfsebene $M'N'$ gelegt, so wird erstere das Hyperboloid in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel schneiden, je nachdem letztere mit dem Kegel nur einen Punkt (den Scheitel) gemein hat, denselben in einer Geraden (einer Erzeugenden) berührt, oder in zwei Geraden (zwei Erzeugenden) schneidet.

Im vorliegenden Fall ist demnach, wie man sieht, die Schnittfigur eine Ellipse, deren Projektionen und wahre Größe wie in der vorigen Aufgabe gefunden werden. Man nehme zu diesem Behufe wieder eine Reihe horizontaler, zur Drehachse senkrechter Hülfsebenen, wie $v'w'$, an. Diese schneidet das Hyperboloid in einem Kreis, dessen Durchmesser $(vw, v'w')$, und die Schnittebene in einer Geraden $(yz, x')$, welche jenen in $x_1$ und $x_2$ durchschneidet. Die Punkte $(x_1, x')$ und $(x_2, x')$ sind nun zwei Punkte der Durchschnittskurve. Auf gleiche Weise werden beliebig viele andere Punkte derselben gefunden. Die beiden Scheitel $(s, s')$,

(t, t') und damit die Symmetrieachse der Schnittkurve und die große Achse des Ellipsenschnittes ergeben sich unmittelbar aus den Durchschnitten s' und t' des V-Risses P R' mit der V-Projektion ($a_1$' e' $a_2$' $c_1$' g' $c_2$') des Hauptmeridians. Ebenso erhält man die beiden andern Scheitel ($u_1$, u'), ($u_2$, u') der kleinen Achse, wenn man (s t, s' t') in (u, u') halbirt und den zugehörigen Parallelkreis zieht, welcher die Projicirende u' u in den Punkten ($u_1$, u') und ($u_2$, u'), den verlangten Punkten, durchschneidet.

Die wahre Größe $S_1$' $X_1$' $U_1$' T' $U_2$' $X_2$' der Schnittfigur erhält man endlich auf bekannte Weise durch Umlegung derselben sammt Schnittebene in die V. E. Dabei ziehe s' $S_1$' $\perp$ P R' und mache s' $S_1$' = s $s_1$; ferner ziehe x' $X_1$' $\perp$ P R' und mache x' $X_1$' = $x_1$ y und x' $X_2$' = $x_2$ y u. s. w. Oder bestimme zuerst die umgelegten Achsen $S_1$' T' = s' t' und $U_1$' $U_2$' = $u_1$ $u_2$ und konstruire die Ellipse aus diesen.

**109.** Wären die Projektionen ($A_1$ $B_1$ $C_1$ $D_1$, $a_1$' e' $a_2$' $c_1$' g' $c_2$') des Hyperboloids selbst nicht gegeben, sondern statt deren die Projektionen ($K_1$ $l_1$, $k_1$' $l_1$') resp. ($L_2$ $k_2$, $l_2$' $k_2$') der durch einen Punkt (h, h') des Kehlkreises zur V. E. parallel geführten Erzeugenden, so erhielte man die Projektionen der Durchschnittsfigur folgendermaßen.

Um vorerst die beiden Scheitel derselben zu erhalten, ziehe durch den Punkt ($\alpha$, $\alpha$') die Gerade ($\alpha\beta$, $\alpha$' P) parallel zur V. E. Diese wird dann die gesuchte Schnittkurve in zwei symmetrische Hälften theilen und darauf die Scheitel angeben. Denkt man sich, die Gerade ($\alpha\beta$, $\alpha$' P) werde um die Drehachse (o, $o_1$' $o_2$') herumgedreht, so beschreibt sie einen Hülfskegel, dessen Spitze in ($\alpha$, $\alpha$') und dessen Basis der mit $\alpha\beta$ aus $\alpha$ beschriebene Kreis ist. Bei dieser Drehung beschreibt auch jeder Scheitel einen Kreis und kömmt dabei nach einander auf alle Erzeugenden des Hyperboloids zu liegen. Befindet sich der eine Scheitel auf der Erzeugenden ($L_2$ $k_2$, $l_2$' $k_2$'), so muß die entsprechende Lage der Geraden ($\alpha\beta$, $\alpha$' P) in der durch die genannte Erzeugende und den Punkt ($\alpha$, $\alpha$') gelegten Hülfsebene liegen. Zieht man also ($\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$) parallel zu ($L_2$ $k_2$, $l_2$' $k_2$'), so bestimmen die Horizontalspuren dieser beiden Geraden nach Früherem (§. 14) den Horizontalriß dieser Hülfsebene, und folglich $\alpha\delta$ und $\alpha\varepsilon$ die Horizontalprojektionen der Geraden, worin der mit ($\alpha\beta$, $\alpha$' P) beschriebene Hülfskegel von derselben geschnitten wird. Die H-Projektionen $\alpha\delta$ und $\alpha\varepsilon$ schneiden ihrerseits die Horizontalprojektion $L_2$ $k_2$ in $s_1$ und $t_1$ und dieses sind nun die H-Projektionen der beiden gesuchten Scheitelpunkte in der gedrehten Stellung. Bringt man daher $\alpha\delta$ und $\alpha\varepsilon$ in die ursprünglichen Lagen $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ zurück, so kömmt bei dieser Rückdrehung $s_1$ nach s und $t_1$ nach t zu liegen. Bringt man endlich noch s und t vertikal nach s' und t' auf P R', so sind (s, s') und (t, t') die Projektionen der gesuchten Scheitelpunkte der Schnittkurve.

Um nun auch noch beliebige Zwischenpunkte der

letzteren zu erhalten, nehme man wieder wie oben (§. 108) horizontale Hülfsebenen an. Der V-Riß einer solchen sei v′ w′. Bestimme die Durchschnitte (y z, x′) und ($w_1$, $w_1'$) dieser Hülfsebene mit der Schnittebene Q P R′ und der Erzeugenden ($L_2 k_2$, $l_2' k_2'$) und beschreibe hierauf mit o $w_1$ einen Kreis, so ist dieß die H-Projektion des Parallelkreises, worin das Hyperboloid von der angenommenen horizontalen Hülfsebene geschnitten wird, und $x_1$, $x_2$, die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit der Graden y z, sind folglich die H-Projektionen der beiden Punkte der Schnittkurve, die in dieser Hülfsebene liegen.

**110.** Ganz ähnlich werden nun auch die Konstruktionen ausgeführt, falls die angenommene Schnittebene das Hyperboloid in einer Hyperbel oder in einer Parabel schneidet. Indem wir deßhalb diese Schnitte nicht mehr weiter verfolgen, wollen wir dagegen noch auf einige andere Eigenthümlichkeiten des windschiefen Umdrehungshyperboloids besonders hinweisen. In dieser Beziehung ist es namentlich die doppelte Erzeugungsart derselben, auf die wir hier noch besonders aufmerksam machen wollen. Indem wir uns hiebei wieder auf die Fig. 80 beziehen, werde die Vertikale (o, $o_1' o_2'$) als Drehachse und die zur V. E. Parallele ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) als erste Erzeugende des gedachten Hyperboloids mit einem Mantel angenommen. Zieht man alsdann o h senkrecht $K_1 l_1$, so gibt die Gerade (o h, h′) den kürzesten Abstand dieser beiden Geraden (§. 39, Fig. 28) und zugleich den Radius des Kehlkreises oder des zur Achse senkrecht stehenden kleinsten Parallelkreises an. Da aus geometrischen Gründen $K_1 h = l_1 h$, so folgt hieraus überdieß, daß der Punkt (h, h′) in gleichen Abständen von den Basen des Hyperboloids entfernt ist. Auf der Erzeugenden ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) sind mehrere Punkte, wie $v_1'$, angenommen und die Projektionen der Parallelkreise, wie (v′ w′, v $x_1$ w $x_2$), verzeichnet worden, welche jene bei der Umdrehung beschreiben.

Dieß vorausgesetzt, denke man sich durch den Punkt (h, h′) eine zweite Gerade ($L_2 k_2$, $l_2' k_2'$) parallel zur V. E. und zwar so, daß ihre Horizontalprojektion $L_2 k_2$ mit $K_1 l_1$ der erstern Erzeugenden zusammenfällt. Diese zweite Gerade kann nun ebenfalls als Erzeugende des Hyperboloids betrachtet werden. Denn schneidet man dieses durch eine horizontale Hülfsebene v′ w′, so schneidet diese die erste Gerade in ($v_1'$, $v_1$) und die zweite in ($w_1'$, $w_1$) und o $v_1$ ist nothwendig auch gleich o $w_1$, woraus folgt, daß ein jeder Punkt der Geraden ($L_2 k_2$, $l_2' k_2'$) auf einem der Parallelkreise liegen wird, welche von den entsprechenden Punkten der andern Geraden ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) beschrieben worden sind.

Wird darum die Gerade ($L_2 k_2$, $l_2' k_2'$), die, wie man sieht, zur erstern Geraden ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) in Bezug auf die Meridianebenen $B_1 D_1$ symmetrisch liegt, um die Achse (o, $o_1' o_2'$) so gedreht, daß jeder Punkt derselben einen Kreis beschreibt, so erzeugt sie

bei dieser Umdrehung dasselbe Hyperboloid, das schon durch die erste Gerade ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) erzeugt worden ist.

Hieraus ergibt sich nun der allgemeine Satz: daß, wenn von zwei beliebigen Geraden, die mit A und B bezeichnet werden mögen, die erstere als Drehachse der letztern angenommen wird, sich für jeden beliebigen Punkt auf B, der P heißen mag, die Lage einer dritten Geraden C bestimmen läßt, welche die Eigenschaft besitzt, daß sie durch die Umdrehung um die Achse A genau dasselbe Hyperboloid wie die andere Gerade B erzeugt. Dazu ist nur nöthig, daß C zu B in Bezug auf den durch P und A gehenden Meridian symmetrisch angenommen werde. Denn denkt man sich die drei Geraden A, B, C durch eine Ebene, senkrecht zu A, in O, Q, R geschnitten, so sind die Abstände OQ und OR einander gleich und folglich Radien des sowohl von Q als von R bei der Umdrehung beschriebenen Kreises.

Dabei bilden alle Geraden, die als verschiedene Lagen der sich drehenden Geraden B betrachtet werden können, „Erzeugungslinien des ersten Systems", und alle Geraden, die als verschiedene Lagen der sich drehenden Geraden C erscheinen, „Erzeugungslinien des zweiten Systems".

**111.** Nach dem vorigen Satze ist es nun leicht, die Projektionen der Erzeugenden des zweiten Systems zu finden, wenn die Drehachse und die Projektionen der Erzeugenden des ersten Systems gegeben sind. Wären daher die Projektionen (o, $o_1' o_2'$) der Drehachse und die Projektionen ($K_1 l_1$, $k_1' l_1'$) einer Erzeugenden des ersten Systems gegeben, so ziehe oh senkrecht zu $K_1 l_1$, projicire h nach h', $L_2$ nach $l_2'$ in die Achse, und $k_2$ nach $k_2'$ in die Horizontale von $l_1'$, und ziehe $l_2' k_2'$, die zur Probe durch h' geht, so ist dieß die V-Projektion der Erzeugenden des zweiten Systems, die hier mit der Erzeugenden des ersten Systems die gleiche H-Projektion hat.

Wären dagegen in Fig. 78 die Achse (o, $o_1' o_2'$), die Projektionen (Qn, $q_1' n'$) einer Erzeugenden des ersten Systems und die Projektionen (l, $l_2'$) eines beliebigen Punktes auf der letztern gegeben, so erhält man die Projektionen der zugehörenden Erzeugenden des zweiten Systems, indem man lV in Bezug auf lo symmetrisch zu lQ zieht, V nach $v_2'$ in die Achse und P nach $p_2'$ in die Horizontale von $w_1'$ projicirt und $v_2'$ mit $p_2'$ durch eine Gerade verbindet, welche zur Probe durch $l_2'$ gehen wird. (VP, $v_2' p_2'$) sind alsdann die verlangten Projektionen der durch (l, $l_2'$) gehenden Erzeugenden des zweiten Systems.

Nach dem Vorigen findet man zu jeder der Erzeugenden (QW, $q_1' w_1'$) und (PV, $p_2' v_2'$) noch eine zweite, welche in den Punkten (n, n') und (m, m') zu den zugehörigen Meridianebenen no und mo symmetrisch gelegen sind; nämlich (QW, $q_2' w_2'$) und (PV, $p_1' v_1'$), und durch einen Punkt (l, $l_1'$) gehen, der in Bezug auf die Ebene des Kehlkreises (engm, e'g')

ebenfalls symmetrisch zu $(1, l_2')$ gelegen ist. (Vergleiche damit §. 161—162.)

**112.** Aus den Entwickelungen der letzten Nummern über die doppelte Erzeugungsart des einmanteligen Hyperboloids ergeben sich noch andere Eigenthümlichkeiten dieser merkwürdigen krummen Fläche, nämlich:

1) Zwei aufeinanderfolgende Lagen der Erzeugenden desselben Systems können sich niemals durchschneiden und daher auch niemals in einer Ebene liegen.
2) Dagegen durchschneidet jede Erzeugende des einen Systems bei ihrer Umdrehung alle Lagen der Erzeugenden des andern Systems.
3) Jede Ebene, welche durch irgend eine Lage der Erzeugenden des einen Systemes geführt wird, schneidet das Hyperboloid zugleich auch nach einer andern Geraden, welche dem zweiten Systeme angehört.
4) Da sich zwei solche Geraden in einem Punkte der krummen Fläche durchkreuzen, so hat eine derartige Schnittebene immer auch einen Punkt, den Kreuzungspunkt beider Geraden, als Berührungspunkt mit der krummen Fläche gemein (§. 124).
5) Die Durchschnittspunkte der einzelnen Parallelkreise mit der zur V. E. parallelen Meridianebene bilden den Hauptmeridian. Dieser wird indessen auch gebildet von den Durchschnittspunkten der aufeinanderfolgenden Erzeugenden mit der zur V. E. parallelen Meridianebene.
6) Diejenigen Erzeugenden, welche zu dieser Meridianebene parallel sind, können dieselbe natürlich nie schneiden, ihre Vertikalprojektionen, wie $k_1'l_1'$ und $k_2'l_2'$, bilden daher an den Hauptmeridianen Asymptoten, welche zugleich den asymptotischen Kegel des windschiefen Hyperboloids bestimmen (§. 108).

## III.

## Konstruktionen der Tangenten an krumme Linien und der Tangirungsebenen an krumme Flächen.

(Fig. 57—58, Blatt 13—20.)

### 1. Tangenten.

**113.** Die krummen Linien kann man sich durch die stetige Bewegung eines Punktes und die krummen Flächen ebenso durch die stetige Bewegung einer Linie erzeugt denken, wie wir dieß früher (in I und $II_1$) für die wichtigsten Arten der krummen Linien und krummen Flächen näher gezeigt haben.

Denkt man sich nun bei irgend einer krummen Linie zwei unendlich nahe Lagen des erzeugenden Punktes, so schließen sie ein Kurvenelement ein, das man als eine Gerade betrachten kann. Und wird dieses

geradlinige Element der Kurve nach beiden Seiten verlängert, so erhält man eine Tangente oder Berührungslinie an die gedachte Kurve. Der Punkt, auf welchen sich das unendlich kleine Kurvenelement reduzirt und in welchem die Tangente gezogen worden ist, heißt dann auch der Tangirungs- oder Berührungspunkt derselben mit der in Rede stehenden krummen Linie. Errichtet man im Berührungspunkt auf die Tangente überdieß eine Senkrechte, so heißt diese die Normale im betreffenden Punkt an die Kurve. Ist die Kurve eine ebene Kurve, so liegt die Normale und Tangente zugleich in der Kurvenebene. Ist dieselbe aber eine gewundene oder räumliche Kurve, so liegt die Normale und Tangente in der Ebene des Krümmungskreises oder in der Krümmungsebene.

Unter dem Krümmungskreis versteht man denjenigen Kreis, welcher sich im betreffenden Element der Kurve unter allen möglichen Berührungskreisen am innigsten an dieselbe anschmiegt.

Der Krümmungskreis für irgend einen Punkt der Kurve bestimmt nun zugleich die Krümmung derselben für diesen Punkt. Man erhält ihn auf graphischem Wege näherungsweise, wenn man an dem Orte der Kurve, für welchen die Krümmung bestimmt werden soll, drei aufeinanderfolgende Punkte in solcher Entfernung annimmt, daß man die Krümmung der beiden dadurch begrenzten Kurvenelemente als gleiche ansehen kann und hernach durch dieselben einen Kreis legt (I., §. 95, Fig. 52).

Daraus folgt auch, daß jede Kurve, von welcher Beschaffenheit sie sonst sein mag, stets nur eine einfache Krümmung, nämlich die des zugehörigen Krümmungskreises, besitzt, und daß daher von einer doppelten oder mehrfachen Krümmung eigentlich keine Rede sein kann, wie dieß noch zuweilen geschieht.

**114.** Nach diesen vorläufigen Erklärungen wenden wir uns nun zur Konstruktion der Tangenten und Normalen an krumme Linien. Solche Konstruktionen sind uns indessen hier nicht mehr ganz neu. Denn bereits schon im „geometrischen Zeichnen" wurden sowohl die Tangente als Normale an einen gegebenen Berührungspunkt der Ellipse, Parabel, Hyperbel ꝛc. konstruirt (I., §. 133, 141 und 145, Fig. 75, 81, 83).

Wäre in einem gegebenen Berührungspunkt irgend einer Kurve, deren Natur nicht bekannt ist, eine Tangente zu ziehen, so nehme in gleichen Abständen vom Berührungspunkt rechts und links zwei weitere Punkte an, verbinde sie durch eine Gerade als Sehne und ziehe damit durch den gegebenen Berührungspunkt eine Parallele, so ist dieß die verlangte Tangente. Diese Konstruktion beruht auf der Anschauung, daß jeder sehr kleine Bogen irgend einer Kurve näherungsweise als ein Kreisbogen betrachtet werden kann. Sie ist daher selbst nur als eine Näherungskonstruktion zu betrachten, dessenungeachtet aber in allen Fällen, wo die krumme Linie von unbekanntem Gesetze ist, zu empfehlen.

In den Figuren 55 und 56 (§. 88 und 89) des ersten Heftes sind auch schon die Aufgaben gelöst worden, durch einen Punkt außerhalb eines Kreises und mit einer gegebenen Richtungslinie parallel an diesen Kreis die beiden möglichen Tangenten zu konstruiren. Im Folgenden sollen nun diese Aufgaben für die übrigen Kegelschnittslinien: die Ellipse, Hyperbel und Parabel ausgedehnt werden.

**115.** Aufgabe. Es ist eine Ellipse und ein Punkt außerhalb derselben gegeben; man soll durch letztern die beiden möglichen Tangenten an erstere ziehen, Fig. 57.

Auflösung. Es sei ABDE die gegebene Ellipse, C ihr Mittelpunkt, F und G die Brennpunkte und H der außerhalb gegebene Punkt, von dem aus die Tangenten an die Ellipse gezogen werden sollen. Verbinde H mit einem Brennpunkt, z. B. mit F, und beschreibe aus H mit HF als Radius einen Hülfskreis, sodann nehme die große Achse AB in den Zirkel und beschreibe damit aus dem andern Brennpunkt G einen zweiten Hülfskreis, der den ersten in $J_1$ und $J_2$ durchschneidet, nun ziehe die Hülfslinien $GJ_1$ und $GJ_2$, so bestimmen diese die Berührungspunkte $K_1$ und $K_2$, womit die beiden verlangten Tangenten $HK_1$ und $HK_2$ selbst bestimmt sind.

**116.** Aufgabe. Es ist eine Hyperbel und ein Punkt außerhalb derselben gegeben; man soll durch diesen an jene die beiden möglichen Tangenten finden, Fig. 58.

Auflösung. Es seien AB und DE die Achsen, C der Mittelpunkt, F und G die Brennpunkte der Hyperbel und H der außerhalb derselben gegebene Punkt. Verbinde wieder H mit einem Brennpunkt, z. B. mit G, beschreibe aus H mit HG einen Hülfskreis und aus F mit AB einen zweiten Kreisbogen, welcher den ersten in $J_1$ und $J_2$ durchschneidet, ziehe $FJ_1$ und $FJ_2$, rückwärts gehörig verlängert, bis sie die Hyperbeläste in $K_1$ und $K_2$ durchschneiden, so sind die Berührungspunkte, womit die verlangten Tangenten $HK_1$ und $HK_2$ bestimmt sind.

**117.** Aufgabe. Es ist eine Parabel und ein Punkt außerhalb derselben gegeben; man soll durch letztern an erstere die beiden möglichen Tangenten ziehen, Fig. 59.

Auflösung. Es sei A der Scheitel, C der Brennpunkt und DE die Direktrix der gegebenen Parabel (wobei $AB = AC = \frac{p}{4}$, d. h. ein Viertel des Parameters) und F der außerhalb gegebene Punkt. Ziehe FC und beschreibe damit aus F einen Hülfskreis, welcher die Direktrix in $G_1$ und $G_2$ durchschneidet, ziehe in $G_1$ und $G_2$ Parallelen mit BC, so sind $H_1$ und $H_2$ die Berührungspunkte der beiden Tangenten $FH_1$ und $FH_2$, welche damit bestimmt sind.

**118.** Aufgabe. Es ist eine Ellipse und eine Richtungslinie außerhalb derselben gegeben; man soll dieser parallel an jene die beiden möglichen Tangenten ziehen, Fig. 60.

Auflösung. Es seien AB und DE die beiden Achsen, F und G die Brennpunkte der gegebenen Ellipse und HJ die gegebene Richtungslinie. Durch einen Brennpunkt, z. B. durch G, fälle auf HJ eine Senkrechte GK, gehörig verlängert, und mit der großen Achse AB beschreibe aus dem andern Brennpunkt F einen Hülfskreis, welcher die Senkrechte in den beiden Punkten $L_1$ und $L_2$ durchschneidet, verbinde diese Punkte mit F, so schneiden die Verbindungslinien die Ellipse in den Punkten $M_1$ und $M_2$ den Berührungspunkten der verlangten Tangenten. Diese zu erhalten, ziehe endlich durch $M_1$ und $M_2$ Parallelen mit HJ.

**119.** Aufgabe. Es ist eine Hyperbel und eine Richtungslinie außerhalb derselben gegeben; man soll an jene mit dieser parallel die beiden möglichen Tangenten ziehen, Fig. 61.

Auflösung. Es seien AB und DE die Achsen und F und G die Brennpunkte der gegebenen Hyperbel und HJ die gegebene Richtungslinie. Wie in der vorigen Figur fälle von einem Brennpunkt, z. B. von G, auf HJ eine Senkrechte GK, gehörig verlängert, und beschreibe mit AB aus dem andern Brennpunkt F einen Hülfskreis, welcher die Senkrechte in den beiden Punkten $L_1$ und $L_2$ durchschneidet, ziehe $FL_1$ und $FL_2$, welche, rückwärts gehörig verlängert, die Hyperbeläste in $M_1$ und $M_2$ durchschneiden, und zieht man endlich durch diese Punkte Parallelen mit HJ, so sind dieß die verlangten Tangenten.

**120.** Aufgabe. Es ist eine Parabel und eine Richtungslinie außerhalb derselben gegeben; man soll an jene mit dieser parallel eine Tangente ziehen, Fig. 62.

Auflösung. A sei der Scheitel, C der Brennpunkt, DE die Direktrix (wobei $AC = AB = \frac{p}{4}$, d. h. gleich $\frac{1}{4}$ des Parameters) und FG die gegebene Richtungslinie. Fälle von C auf diese eine Senkrechte CH, welche die Direktrix in einem Punkt J schneidet, ziehe $JK \parallel BC$, so ist K der Berührungspunkt und $KL \parallel FG$ die Tangente selbst.

Da die Senkrechte CH die Direktrix DE nur in einem Punkte schneidet, so kann man mit der gegebenen Richtungslinie FG an die Parabel auch nur eine parallele Tangente ziehen. Die andere muß man sich an den andern (unzugänglichen) Parabelast im Unendlichen denken.

**121.** Sind die Kurven nicht in einer Projektionsebene, sondern in einer Ebene des Raumes gelegen, z. B. als Durchschnittskurven von krummen Flächen mit Ebenen, so erhält man die Tangenten an dieselben auf gleiche Weise. Doch läßt sich in einem solchen Fall die Konstruktion meistens noch dadurch verein-

fachen, daß man die zugehörige Spur der Tangente zu Hülfe nimmt, wie dieß z. B. in Fig. 46 beim elliptischen Kegelschnitt geschehen ist, wo zur Auffindung der Tangente an irgend einem Punkt (2, 2′) der elliptischen Schnittkurve (1, 2, 3, 4, . . ., 1′, 2′, 3′, 4′, . . .) deren H-Spur T benützt worden ist, welche ihrerseits mittelst der Tangente B T im Fußpunkt B der zugehörigen Erzeugenden (B s, b′s′) des Kegels an den Kreisumfang der Basis in dem H-Riß P Q der Schnittebene erhalten wurde. Indem man bei der Umlegung der Schnittebene sammt Schnittfigur in die V. E. den Punkt T nach T′ auf den umgelegten H-Riß bringt und T′ mit II′ verbindet, so ist dieß die Tangente in II′ an die umgelegte Ellipse. Will man endlich auch die Tangente an den zugehörigen Punkt II der in Fig. 47 entwickelten Schnittkurve I II III . . . I erhalten, so ziehe ebenso die Tangente an den zugehörigen Punkt B des entwickelten Kreises A B C . . . A, mache B T (in Fig. 47) = B T (in Fig. 46) und ziehe T II, so ist dieß die verlangte Tangente. Bei den folgenden Konstruktionen der Tangirungsebenen an krumme Flächen werden die Tangentenkonstruktionen als bekannt vorausgesetzt und angewendet werden.

## 2. Tangirungsebenen.

**122.** Denkt man sich auf irgend einer krummen Fläche zwei unendlich nahe Lagen der Erzeugenden, so schließen sie ein Flächenelement ein, das, je nach der Gestalt der krummen Fläche, ein ebenes, ein windschiefes oder ein gebogenes Flächenelement bildet (s. II. 1, §. 108).

**123.** Wird im ersten Fall das ebene Flächenelement nach allen Seiten ausgedehnt, so erhält man eine Ebene, welche die krumme Fläche längs des betreffenden Flächenelements tangirt oder berührt und daher Tangirungs- oder Berührungsebene genannt wird. Die Berührung selbst reduzirt sich in diesem Fall, zu welchem alle entwickelbaren krummen Flächen, also namentlich die Zylinder- und Kegelflächen, gehören (s. II. 1, §. 97 und 99), auf eine Gerade und zwar auf eine Erzeugende der krummen Fläche.

**124.** Im andern Fall, zu dem alle windschiefen krummen Flächen gehören (s. II. 1, §. 105 und 106), ist die Tangirungsebene an irgend einen Punkt der krummen Fläche zugleich eine Schnittebene. Die Berührung besteht dann bloß in einem Punkt, und zwar ist dieß der Durchschnittspunkt der beiden geradlinigen Erzeugenden (von denen die eine dem ersten und die andere dem zweiten Erzeugungssystem angehört), worin die krumme Fläche von der Ebene geschnitten wird (§. 112. 3).

**125.** Im dritten Fall endlich, wohin namentlich die Umdrehungsflächen mit krummlinigen Erzeugenden

gehören (II. 1, §. 103), kommt es darauf an, ob die betreffende krumme Fläche nach Außen convex oder concav ist. Kehrt sie nach Außen ihre convexe oder erhabene Seite, wie z. B. die Kugel, das Ellipsoid ꝛc., so kann jede Tangirungsebene die krumme Fläche nur in einem Punkte berühren. Kehrt sie hingegen ihre concave oder hohle Seite nach Außen, wie z. B. die Einziehung ꝛc., so wird die Tangirungsebene die krumme Fläche ebenfalls in einem Punkt berühren, dieselbe aber zugleich in einer krummen Linie durchschneiden.

**126.** Soll nun die Tangirungsebene an einen Punkt irgend einer krummen Fläche gefunden werden, so denke man sich diese durch zwei beliebige Ebenen, die durch den gegebenen Punkt gehen, geschnitten, ihre Durchschnittslinien, die im Allgemeinen zwei krumme Linien sein werden, bestimmt und an diese im gedachten Punkt Tangenten gezogen. Diese beiden Tangenten bestimmen alsdann — als zwei in einem Punkt sich schneidende Geraden — eine Ebene, welches die verlangte Tangirungsebene ist.

Dieselbe enthält zugleich alle Tangenten, welche im betreffenden Punkt an die krumme Fläche überhaupt gezogen werden können.

**127.** Die ganz allgemeine Konstruktion der Tangirungsebene, wie sie im vorigen §. angegeben worden ist, kann indessen, je nach der Beschaffenheit der krummen Fläche, mehr oder weniger vereinfacht werden.

Ist die krumme Fläche eine Umdrehungsfläche, wie z. B. das Ellipsoid, so kann man für die beiden durch den gegebenen Punkt gehenden Kurven den zugehörigen Meridian und Parallelkreis annehmen. Wird dann noch die Drehachse der Umdrehungsfläche zu einer P. E. senkrecht vorausgesetzt, so daß die Meridianebenen zu derselben senkrecht und die Parallelkreise parallel zu ihr sind, so wird die Auflösung der Aufgabe wesentlich erleichtert.

**128.** Bei jeder Umdrehungsfläche ist die Berührungsebene senkrecht zu der durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene. Denn die Berührungsebene enthält die Tangente des durch den Berührungspunkt gehenden Parallelkreises, und diese ist senkrecht auf dem Radius des letztern, d. i. auf der Durchschnittslinie der Meridianebene mit der Ebene des Parallelkreises, also auch senkrecht auf der Meridianebene, und folglich ist die Berührungsebene selbst senkrecht auf dieser.

**129.** Ist die krumme Fläche eine windschiefe Fläche, wie z. B. das hyperbolische Paraboloid oder das einmantelige Hyperboloid, so ist die Tangirungsebene nach dem Obigen (§. 124) durch die beiden Erzeugenden des gegebenen Punktes vollkommen bestimmt. Man hat daher nur durch diesen die beiden zugehörigen Erzeugenden zu ziehen (§. 111) und durch die erhaltenen beiden Geraden eine Ebene zu legen, so wird dieß die verlangte Tangirungsebene sein.

**130.** Am einfachsten gestaltet sich die Auflösung unserer Aufgabe bei den entwickelbaren krummen Flächen, wie bei den Zylinder- und Kegelflächen. Denn bei diesen hat man bloß durch den gegebenen Punkt die zugehörige Erzeugende und in dem Punkt, wo diese die Leitlinie durchschneidet, die zugehörige Tangente an diese zu ziehen und durch diese beiden Geraden eine Ebene zu legen, welches dann die verlangte Tangirungsebene ist. Wird die Leitlinie oder Basis der Zylinder- oder Kegelfläche in einer P. E., z. B. in der H. E., selbst angenommen, so ist die zweite Gerade, d. i. die Tangente an dieselbe, zugleich der H-Riß der Tangirungsebene. Und zieht man im Punkt, wo die Erzeugende die V. E. durchschneidet, an die zugehörige Schnittfigur der krummen Fläche mit der V. E. eine Tangente, so ist dieß zudem der V-Riß der Berührungsebene.

**131.** Errichtet man im Berührungspunkt irgend einer krummen Fläche auf die Tangirungsebene eine Senkrechte, so ist dieß die N o r m a l e der krummen Fläche an diesem Punkt.

Jede Ebene, welche durch die Normale gelegt wird, ist nicht nur senkrecht zur zugehörigen Tangirungsebene, sondern auch im betreffenden Punkt senkrecht zur krummen Fläche selbst. Sie wird daher ebenfalls N o r m a l e b e n e genannt. Bei den Umdrehungsflächen sind die Meridianebenen daher immer auch Normalebenen zu der Tangirungsebene (§. 128).

**132.** Haben zwei oder mehrere krumme Flächen ein Flächenelement gemein, so berühren sie sich daselbst und haben an der Berührungsstelle zugleich eine gemeinschaftliche Tangirungsebene und Normalebene, sowie gemeinschaftliche Tangenten und Normale. Denkt man sich z. B. an irgend einen Parallelkreis einer Umdrehungsfläche, z. B. eines Ellipsoides, eine Tangente gezogen, so wird diese bei der Umdrehung selbst einen umhüllenden Kegel, resp. Zylinder, bilden, welcher mit dem Umdrehungsellipsoid den gedachten Parallelkreis, sowie in jedem Punkt desselben die Tangirungsebene und Normalebene, die Tangenten und Normale gemein hat. Ebenso kann die Normale oder Senkrechte, welche in irgend einem Parallelkreis einer Umdrehungsfläche auf die zugehörige Tangente errichtet wird, als Radius einer eingehüllten Kugel angenommen werden, welche mit der gedachten Umdrehungsfläche den erwähnten Parallelkreis, sowie in jedem Punkt desselben die Tangente und die Tangirungsebene, Normale und Normalebene gemeinsam hat.

**133.** Nach diesen allgemeinen Erklärungen sollen nun die wichtigsten Aufgaben über Tangirungsebenen speziell gelöst werden. Dabei werden wir, wie früher bei den Tangenten an krumme Linien, einen Punkt auf der krummen Fläche, oder einen Punkt außerhalb derselben, oder eine Richtungslinie oder Richtungsebene, mit welcher die Tangirungsebene parallel sein soll, sowie die krumme Fläche selbst als gegeben betrachten,

während die Risse der Tangirungsebene und die Projektionen des Berührungspunktes, resp. der Berührungslinie und der Schnittlinien zu suchen sind.

### a. Tangirungsebenen an Zylinderflächen und Kegelflächen.

**134.** Sowohl die Zylinder- als Kegelflächen sind in den folgenden Aufgaben immer so angenommen, daß sie von beiden Projektionsebenen geschnitten werden. Die Risse der Tangirungsebenen an dieselben sind dann zugleich Tangenten an die entsprechenden Durchschnittsfiguren, wie bereits oben bemerkt worden ist (§. 130).

**135.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Zylinderfläche und die Horizontalprojektion eines Punktes auf derselben gegeben; man soll die Risse der zugehörigen Berührungsebene finden, Fig. 63.

Auflösung. Es seien A B C D E F g h i k l m, a′ b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ k′ l′ m′ die Projektionen der gegebenen Zylinderfläche und n die gegebene Horizontalprojektion des Berührungspunktes.

Zuerst bestimme die zugehörige Vertikalprojektion des letztern. Dazu ziehe durch n eine Parallele $P_1$ q mit der H-Projektion A g einer Erzeugenden, so kann dieselbe als H-Riß einer durch n zu den Erzeugenden des Zylinders parallel gelegten und zur H. E. senkrecht stehenden Ebene betrachtet werden, welche den Zylinder in den beiden Erzeugenden ($P_1$ q, $p_1'$ $Q_1'$) und ($P_2$ q, $p_2'$ $Q_2'$) schneidet. Projicirt man nun n vertikal nach $n_1'$ und $n_2'$ auf die V-Projektionen derselben, so sind dieß die Vertikalprojektionen zweier Punkte, die der gegebenen Horizontalprojektion n entsprechen und an welcher nun die zugehörigen Berührungsebenen zu suchen sind.

Diese zu finden, ziehe in $P_1$ und $P_2$ die Tangenten $P_1 R_1$ und $P_2 R_2$ an die Basis A B C D E F, so sind dieß die Horizontalrisse und ebenso in $Q_1'$ und $Q_2'$ die Tangenten $Q_1' R_1$ und $Q_2' R_2$ an die vertikale Durchschnittsfigur G′ H′ J′ K′ L′ M′, so sind dieß die zugehörigen Vertikalrisse, die sich zur Probe in $R_1$ und $R_2$ durchschneiden.

Anstatt die Tangenten an die Durchschnittskurve in der V. E. zu ziehen, kann man daher auch nur die Vertikalspuren $Q_1'$ und $Q_2'$ der durch (n, $n_1'$) und (n, $n_2'$) gehenden Erzeugenden suchen und dieselben mit den Punkten $R_1$ und $R_2$, wo die Horizontalrisse die Achse durchschneiden, verbinden.

**136.** Für den Fall, daß der Horizontalriß die Achse nicht schneidet, kann man sich zur Bestimmung eines zweiten Punktes des Vertikalrisses einer horizontalen Hauptlinie bedienen (§. 32). Dazu nehme in der zugehörigen Erzeugenden den beliebigen Punkt (s, s′) und ziehe durch ihn mit $P_1 R_1$ die Parallele (s t, s′ T′). Die Vertikalspur T′ dieser Geraden gehört dann dem Vertikalriß $R_1$ $Q_1'$ an.

137. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Zylinderfläche und die Projektionen eines Punktes außerhalb derselben gegeben; man soll die Risse der beiden Berührungsebenen finden, welche durch diesen an jene gelegt werden können, Fig. 64.

Auflösung. Es seien A B C D E F g h i k l m, a' b' c' d' e' f' g' h' i' k' l' m' die gegebenen Projektionen der Zylinderfläche und n, n' die gegebenen Projektionen des Punktes.

Denkt man sich durch den gegebenen Punkt an die gegebene Zylinderfläche die beiden Berührungsebenen gelegt, so müssen sie sich nothwendig in einer Geraden durchschneiden, die durch den gegebenen Punkt geht und zu den Erzeugenden des Zylinders parallel ist. Man ziehe daher durch (n, n') eine Parallele mit den Erzeugenden des Zylinders, d. i. P q ∥ A g und p' Q' ∥ a' G', suche deren Spuren P und Q' und ziehe durch die H-Spur P die Tangenten P $R_1$ und P $R_2$ an die Basis A B C D E F in der H. E. und durch die V-Spur Q' die Tangenten Q' $T_1$' und Q' $T_2$' an die Durchschnittskurve G' H' J' K' L' M' in der V. E., so sind dieß die Risse der beiden verlangten Berührungsebenen. Oder man suche, wie dieß bereits in der vorigen Aufgabe bemerkt worden ist, auch nur die Vertikalspuren $T_1$' und $T_2$' der zu $R_1$ und $R_2$ gehörigen Erzeugenden und verbinde sie mit Q'.

138. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Zylinderfläche und die Projektionen einer beliebigen Geraden als Richtungslinien gegeben; man soll die Risse der Berührungsebenen finden, welche zu dieser parallel an jene gelegt werden können, Fig. 65.

Auflösung. Es seien A B C D E F g h i k l m, a' b' c' d' e' f' g' h' i' k' l' m' die gegebenen Projektionen der Zylinderfläche und n P, N' p' die gegebenen Projektionen der Richtungslinie.

Denkt man sich die beiden Berührungsebenen gezogen, so werden sie nicht nur unter sich, sondern auch derjenigen Ebene parallel sein, welche durch die gegebene Richtungslinie und zugleich durch eine zu den Erzeugenden des Zylinders parallelen Geraden geht. Man nehme daher in der gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt (q, q') an und ziehe durch ihn zu den Erzeugenden des Zylinders eine Parallele (R s, r' S'). Diese beiden Geraden (n P, N' p') und (R s, r' S') bestimmen dann eine Hülfsebene (P R, N' S'), mit welcher die gesuchten Berührungsebenen parallel sind.

Die Risse der letzteren zu erhalten, hat man daher nur an die Basis A B C D E F in der H. E. zum Hülfsriß P R die parallelen Tangenten $T_1$ $V_1$ und $T_2$ $V_2$ und an die Durchschnittskurve G' H' J' K' L' M' in der V. E. zum Hülfsriß N' S' die parallelen Tangenten $U_1$' $V_1$ und $U_2$' $V_2$ zu ziehen, die sich zur Probe wieder in $V_1$ und $V_2$ durchschneiden.

Auch hier genügt es, statt der Tangenten an die Durchschnittskurve in der V. E. bloß die V-Spuren

$U_1'$ und $U_2'$ der entsprechenden Erzeugungslinien ($T_1 u_1$, $t_1' U_1'$) und ($T_2 u_2$, $t_2' U_2'$) zu suchen und dieselben mit den Punkten $V_1$ und $V_2$ in der Achse zu verbinden, oder, falls die letztern nicht mehr zugänglich sein sollten, durch die V-Spuren $U_1'$ und $U_2'$ mit dem Vertikalriß $N' S'$ der Hülfsebene Parallelen zu ziehen.

**139.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Kegelfläche und die Horizontalprojektion eines Punktes auf derselben als Berührungspunkt gegeben; man soll die Risse der zugehörigen Berührungsebene finden, Fig. 66.

Auflösung. Es seien A B C D E F s g h i k l m, a' b' c' d' e' f' s' g' h' i' k' l' m' die Projektionen der gegebenen Kegelfläche und n die gegebene Horizontalprojektion des Berührungspunktes. Auf gleiche Weise wie bei der entsprechenden Aufgabe über die Zylinderfläche (§. 135, Fig. 63) suche man auch hier zuerst die zu n gehörigen Vertikalprojektionen $n_1'$ und $n_2'$. Man hat daher ebenfalls zwei Punkte (n, $n_1'$) und (n, $n_2'$), an welche die Tangirungsebenen zu legen sind. Die Risse dieser Ebenen zu bestimmen, verfahre man ähnlich wie in der eben erwähnten Aufgabe bei der Zylinderfläche.

Die Tangirungsebene des Punktes (n, $n_1'$) enthält nach Früherem (§. 130) die Erzeugende ($P_1$ s, $p_1'$ s') und berührt die Kegelfläche in der ganzen Ausdehnung dieser Geraden, also auch in den Punkten $P_1$ und $Q_1'$. Zieht man daher im Punkt $P_1$ eine Tangente $P_1 R_1$ an die Basis in der H. E. und in $Q_1'$ eine Tangente $Q_1' R_1$ an die Durchschnittskurve in der V. E., so sind diese Geraden zugleich die Risse der zu (n, $n_1'$) gehörenden Tangirungsebene. Auf gleiche Weise finden sich die Risse $P_2 R_2$, $Q_2' R_2$ der zu (n, $n_2'$) gehörenden Tangirungsebene.

**140.** Aufgabe. Es sind die Projektionen eines Kegels und die Projektionen eines Punktes außerhalb desselben gegeben; man soll die durch letztern an erstern gelegten beiden möglichen Berührungsebenen finden, Fig. 67.

Auflösung. Es seien A B C D E F s g h i k l m, a' b' c' d' e' f' s' g' h' i' k' l' m' die gegebenen Projektionen der Kegelfläche und (n, n') die Projektionen des gegebenen Punktes außerhalb derselben. Denkt man sich beide Berührungsebenen gefunden, so müssen sie der Aufgabe zufolge durch den gegebenen Punkt (n, n') und zugleich durch den Scheitel (s, s') gehen und sich folglich in einer Geraden schneiden, die selbst durch diese beiden Punkte geht.

Man ziehe daher durch den gegebenen Punkt (n, n') und den Scheitel (s, s') eine Gerade (P q, p' Q'), suche ihre Spuren P und Q' und ziehe von diesen an die Basis A B C D E F, die Tangenten $P R_1$ und $P R_2$ und an die vertikale Durchschnittsfigur G' J' M' die Tangenten $Q' T_1'$ und $Q' T_2'$, so sind dieß die Risse der verlangten beiden Berührungsebenen.

Die Vertikalrisse können übrigens auch hier erhalten werden, wenn man einfach Q' mit $T_1'$ und $T_2'$, den Vertikalspuren der beiden Erzeugenden ($R_1$ $t_1$, $r_1'$ $T_1'$) und ($R_2$ $t_2$, $r_2'$ $T_2'$), verbindet.

**141.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Kegelfläche und die Projektionen einer Geraden als Richtungslinie gegeben; man soll die Risse der zur letztern parallelen beiden möglichen Berührungsebenen an die erstere finden, Fig. 68.

Auflösung. Es seien ABCDEFsghiklm, a' b' c' d' e' f' s' g' h' i' k' l' m' die gegebenen Projektionen der Kegelfläche und (n p, n' p') die gegebenen Projektionen der Richtungslinie.

Da die beiden zu suchenden Tangirungsebenen der gegebenen Richtungslinie parallel sein sollen, so werden sie sich in einer Geraden schneiden, welche zu ihr parallel ist und zugleich durch den Scheitel geht.

Man ziehe daher durch (s, s') mit (n p, n' p') die Parallele (Q u, q' U'), suche ihre Spuren Q und U' und ziehe von diesen Punkten an die Basen oder Durchschnittsfiguren ABCDEF und G' J' M' die Tangenten Q $R_1$ und Q $R_2$, beziehungsweise U' $T_1'$ und U' $T_1'$, so sind dieß die Risse der verlangten Tangirungsebenen. Die Vertikalrisse können auch hier wieder dadurch erhalten werden, daß man U' mit den Vertikalspuren $T_1'$ und $T_2'$ der entsprechenden Erzeugenden verbindet.

Zur Probe müssen sich die Risse derselben Ebene wie immer in einem Punkt der Achse schneiden oder parallel sein. Fällt der Durchschnittspunkt der Risse mit der Achse außerhalb der Zeichnungsfläche, so kann zur Bestimmung eines andern zugänglichen Punktes des Vertikalrisses U' $T_1'$ auch hier eine horizontale Hauptlinie zu Hülfe genommen werden. Im vorliegenden Falle ist beispielsweise die Hauptlinie (s v, s' V'), deren H-Projektion s v parallel mit dem H-Riß Q $R_1$ und deren V-Projektion s' V' parallel zur Achse, benützt worden, welche dann in der V-Spur V' einen weitern Punkt des zugehörigen Vertikalrisses liefert.

### b. Tangirungsebenen an Umdrehungsflächen und windschiefen Flächen.

**142.** Zur Vereinfachung wurde bei den folgenden Aufgaben über die Tangirungsebenen an die Umdrehungsflächen die Drehachse der letztern auch hier senkrecht zur H. E. angenommen. In Folge dieser Annahme projiciren sich alsdann alle Parallelkreise horizontal wieder als Kreise in wahrer Größe und vertikal als Geraden parallel zur P-Achse, und der Hauptmeridian stellt sich vertikal als Kurve in wahrer Größe und horizontal als Gerade parallel zur Projektionsachse dar, während die Meridiane in den übrigen Stellungen sich in der H. E. ebenfalls als Geraden schief zur P-Achse und in der V. E. als verkürzte Kurven projiciren, die, falls sie zur Konstruktion nöthig sind, auf bekannte Weise gefunden werden

(II. 1, §. 116). Die Drehachse selbst projicirt sich endlich in der H. E. als Punkt und in der V. E. als Gerade senkrecht zur P-Achse.

**143.** Aufgabe. Es sind die Projektionen der Drehachse und des Hauptmeridians irgend einer Umdrehungsfläche, z. B. eines kreisrunden Ellipsoides, sowie die H-Projektion eines Punktes auf derselben als Berührungspunkt gegeben; man soll die Risse der zugehörigen Berührungsebene finden, Fig. 69.

Auflösung. Es seien o, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse und a c, a' b' c' d' die Projektionen des Hauptmeridians, der hier als Ellipse angenommen worden ist. Beschreibt man mit der halben kleinen Achse a' c' als Radius aus o einen Kreis a e c f, so ist dieß die H-Projektion des Aequators oder des größten Parallelkreises und als solcher zugleich der Umriß der H-Projektion des Ellipsoides.

Ist im Fernern g, die H-Projektion eines Punktes auf dem Ellipsoid, gegeben, so findet man die zugehörige Vertikalprojektion, indem man durch diesen Punkt eine Vertikalebene gelegt denkt, welche die Oberfläche des Ellipsoides in einem Meridian schneidet, dessen H-Projektion der durch g gehende Durchmesser $a_1$ $c_1$ ist und dessen Vertikalprojektion $a_1'$ b' $c_1'$ d' auf bekannte Weise gefunden wird und alsdann diesen Meridian in eine zur V. E. parallele Lage dreht, in welcher er mit den Projektionen a c, a' b' c' d' des Hauptmeridians zusammenfällt, wobei g nach $g_1$ und, vertikal projicirt, nach $g_1'$ und $g_1''$ zu liegen kommt. Wird hierauf der gedachte Meridian wieder in seine vorige Lage zurückgebracht, so bleiben die Punkte $g_1'$ und $g_1''$ gleich hoch. Zieht man daher durch diese Punkte Parallelen mit der P-Achse und projicirt g auf dieselben nach g' und g'', so sind dieß die Vertikalprojektionen zweier Punkte, die der gemeinschaftlichen Horizontalprojektion g entsprechen.

**144.** Um nun die Risse der Tangirungsebenen an die beiden Punkte (g, g') und (g, g'') zu finden, hat man nur an den durch jeden Punkt gehenden Meridian und Parallelkreis eine Tangente und durch je beide Tangenten desselben Punktes eine Ebene zu legen und ihre Risse zu bestimmen, wie dieß schon oben (§. 127) angedeutet worden ist.

Gehen wir hiebei zuerst vom Punkt (g, g') aus, so sind g k, senkrecht zum Radius o g, und g' $K_1'$, parallel zur Projektionsachse, die Projektionen der zugehörigen Tangente an den Parallelkreis, und $K_1'$, ihre Vertikalspur, ein Punkt des Vertikalrisses der entsprechenden Berührungsebene. Ebenso projicirt sich die Tangente an den Meridian horizontal als Gerade, die mit dem Horizontalriß $a_1$ $c_1$ der Meridianebene zusammenfällt, und vertikal als Tangente an die Ellipse $a_1'$ b' $c_1'$ d', die auf bekannte Weise (I. §. 133, Fig. 75) gefunden wird. Bei der Umdrehung des Meridians ($a_1$ $c_1$, $a_1'$ b' $c_1'$ d') in die Lage des Hauptmeridians (a c, a' b' c' d') bleibt die Tangente des

Punktes g′ wieder eine Tangente im Punkte $g_1{}'$ an die Ellipse a′ b′ c′ d′. Wenn man will, kann man daher auch diese letztere zuerst ziehen und dann nur den Punkt g′ mit $h_1{}'$ verbinden, um die erstere zu erhalten. Ihre Horizontalspur J liefert alsdann einen Punkt des gesuchten Horizontalrisses. Da dieser überdieß zu g k parallel oder zu $a_1$ $c_1$ senkrecht ist (§. 128), so hat man nur noch durch J zu $a_1$ $c_1$ eine Senkrechte oder zu g k eine Parallele J $M_1$ zu ziehen und $M_1$ mit $K_1{}'$ zu verbinden, um die Risse J $M_1$, $M_1$ $K_1{}'$ der verlangten ersten Berührungsebene zu erhalten.

Ganz auf gleiche Weise verfährt man, um die Risse L $M_2$, $M_2$ $K_2{}'$ der zu dem Punkt (g, g″) gehörigen Berührungsebene zu finden. Die Projektionen der Tangente an den durch (g, g″) gelegten Parallelkreis sind hiebei g k, g″ $K_2{}'$ und die der Tangente an den zugehörigen Meridian g o, g″ $h_1{}''$. Die erstere Tangente schneidet die V. E. in $K_2{}'$ und die letztere die H. E. in L.

Da die Punkte g′ und g″ von a′ c′ gleich weit entfernt sind, so sind die Tangenten g′ $h_1{}'$ und g″ $h_1{}''$ in Bezug auf a′ c′ zu einander symmetrisch gelegen und schneiden sich daher in einem Punkt p′ derselben. In der gleichen Höhe schneiden sich auch die zur V. E. in parallele Lage gedrehten Tangenten $g_1{}'$ $h_1{}'$ und $g_1{}''$ $h_1{}''$ in einem Punkt $p_1{}'$ und deßgleichen auch die V-Risse $M_1$ $K_1{}'$ und $M_2$ $K_2{}'$ in einem Punkt N′. Hieraus folgt zugleich, daß die drei Punkte p′, $p_1{}'$ und N′ in einer Geraden und zwar in der Verlängerung der kleinen Achse a′ c′ liegen müssen, und daß daher der Punkt N′ zur Konstruktion der Vertikalrisse als eine Probe dient.

**145.** In Fig. 70 ist die vorige Aufgabe noch besonders für das kreisrunde Paraboloid gelöst worden. Dabei sind o, $o_1{}'$ $o_1{}'$ die gegebenen Projektionen der Drehachse, a c, a′ b′ c′ die gegebenen Projektionen des Hauptmeridians und g, g′ die gegebenen Projektionen des Berührungspunktes, sowie g k, g′ K′ und g J, g′ i′ die Projektionen der durch (g, g′) an den zugehörigen Parallelkreis und Meridian gelegten Tangenten, deren Spuren K′ und J die gesuchten Risse J L, L K′ der zugehörigen Berührungsebene bestimmen.

Sollte der Punkt L, wo sich beide Risse in der Achse durchschneiden, nicht mehr auf die Zeichnungsfläche fallen, so bestimme man einen zweiten Punkt des Vertikalrisses mittelst einer horizontalen Hauptlinie der Berührungsebene, wie dieß bereits früher bei der Zylinder- und Kegelfläche geschehen ist (§. 136 und §. 141).

**146.** Aufgabe. An eine Umdrehungsfläche, z. B. an das kreisrunde Ellipsoid, dessen Drehachse und Hauptmeridian, sowie die Risse einer Richtungsebene gegeben, die beiden möglichen parallelen Berührungsebenen zu finden, Fig. 71.

Auflösung. Es seien o, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse, a c und a′ b′ c′ d′ die Projektionen des Hauptmeridians und H G, H J′ die Risse der Richtungsebene.

Da nach Früherem (§. 128) jede Berührungsebene zu der durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene senkrecht ist, so wird die Ebene, welche durch die Drehachse senkrecht zu der gegebenen Richtungsebene gelegt wird, das Ellipsoid in demjenigen Meridian schneiden, in welchem die Berührungspunkte der gesuchten Tangirungsebenen liegen. Zugleich schneidet die Meridianebene die Tangirungsebene in einer Geraden, mit welcher die Tangenten an die Berührungspunkte des Meridians parallel sind.

Man ziehe daher o K senkrecht zu G H, so ist dieß der H-Riß der zur gegebenen Richtungsebene senkrechten Meridianebene. Diese schneidet das Ellipsoid in dem Meridian (m n, m′ b′ n′ d′) und die Richtungsebene in der Geraden (K l, k′ l′), womit die Tangenten (m P, m′ p′) und (n Q, n′ q′) des Meridians parallel sind.

Sucht man daher die Horizontalspuren P und Q der letztern, sowie die Vertikalspuren R′ und S′ der durch die Berührungspunkte (m, m′) und (n, n′) gelegten horizontalen Hauptlinien, so sind damit die Risse P T, T R′ und Q U, U S′ der beiden verlangten Berührungsebenen bestimmt.

**147.** Die Aufgabe kann auch aufgelöst werden, ohne daß man den Meridian der Berührungspunkte wirklich zeichnen muß.

Indem man nämlich die Meridianebene in eine zur V. E. parallele Lage dreht, kommen die Punkte (m, m′) und (n, n′) nach ($m_1$, $m_1'$) und ($n_1$, $n_1'$) und (K, k′) und (l, l′) nach ($K_1$, $k_1'$) und ($l_1$, $l_1'$), also die Vertikalprojektion der Durchschnittslinie der Meridianebene mit der gegebenen Richtungsebene nach $k_1' \, l_1'$ zu liegen. Dieser parallel sind alsdann die Vertikalprojektionen $m_1' \, p_1'$ und $n_1' \, q_1'$ der Tangenten an den Hauptmeridian zu ziehen, und die Punkte ($m_1$, $m_1'$) und ($n_1$, $n_1'$) nach (m, m′) und (n, n′) zurückzudrehen, um die wirklichen Berührungspunkte beider Berührungsebenen zu erhalten. Um dann noch ihre Risse zu finden, suche man die Horizontalspuren $P_1$ und $Q_1$ der Tangenten ($m_1 P_1$, $m_1' p_1'$) und $n_1 Q_1$, $n_1' q_1'$) und drehe dieselben ebenfalls nach P und Q in die anfängliche Lage der Meridianebene zurück. Damit sind die Horizontalrisse P T und Q U bestimmt. Die Vertikalrisse ergeben sich dann wie oben mittelst der horizontalen Hauptlinien (m r, m′ R′) und (n s, n′ S′), indem man die Vertikalspuren R′ und S′ der letztern mit T und U verbindet, oder noch einfacher, indem man mit H J′, dem V-Riß der Richtungsebene, durch T und U Parallelen zieht (§. 33). Diese letztere Auflösung gilt auch für die beiden vorigen Aufgaben.

**148.** Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt

außerhalb einer Umdrehungsfläche, z. B. eines Ellipsoides, an einen gegebenen Parallelkreis derselben die beiden möglichen Tangirungsebenen zu finden, Fig. 72.

Auflösung. Denkt man sich dem Ellipsoid einen Kegel umgeschrieben oder eine Kugel eingeschrieben, so daß diese Flächen mit dem Ellipsoid den gegebenen Parallelkreis gemein haben, so werden die gesuchten Tangirungsebenen an das Ellipsoid zugleich auch Tangirungsebenen an den umgeschriebenen Kegel oder an die eingeschriebene Kugel sein (§. 132).

Die vorliegende Aufgabe bietet also Anlaß zu zwei Auflösungen, die wir nach einander in besondere Behandlung nehmen wollen.

**149.** I. Auflösung. Mittelst des umgeschriebenen Kegels.

Es seien o, $o_1{}'$ $o_2{}'$ die Projektionen der Drehachse, a c, a′ b′ c′ d′ die Projektionen des Hauptmeridians, a e c f, a′ c′ die Projektionen des Aequators oder des größten Parallelkreises, g i h, g′ h′ die Projektionen des gegebenen Parallelkreises, an den die beiden möglichen Berührungsebenen gesucht werden sollen, und endlich (k, k′) die Projektionen des außerhalb des Ellipsoides gelegenen Punktes.

Ziehe in (g, g′) an den Hauptmeridian eine Tangente (g o, g′ l′), so wird dieselbe, indem sie sich mit dem Meridian um die Drehachse dreht, einen das Ellipsoid umhüllenden und in dem Parallelkreis (g i h, g′ h′) berührenden Kegel beschreiben, der für jeden Punkt des Parallelkreises mit dem Ellipsoid dieselbe Tangirungsebene besitzt. Denn nach Früherm enthält die Berührungsebene an irgend einem Punkt des Parallelkreises die Tangente des letztern und die Tangente des Meridians; als Berührungsebene an den Kegel enthält dieselbe ebenfalls die Tangente des Parallelkreises und die Erzeugende des Kegels, welche aber mit der Tangente des Meridians zusammenfällt. Darum fallen auch beide Berührungsebenen an das Ellipsoid und an den Kegel in eine Ebene zusammen.

Man kann deßhalb, um die Tangirungsebene durch den gegebenen Punkt an den gegebenen Parallelkreis des Ellipsoides zu erhalten, zuerst die Tangirungsebene an den umhüllenden Kegel bestimmen (§. 140), so ist diese alsdann zugleich die verlangte Berührungsebene an das Ellipsoid. In der Figur ist übrigens diese Aufgabe auf dreierlei Weise ausgeführt worden.

Einmal indem man den umhüllenden Kegel von der H. E. selbst schneiden läßt und von N, der Horizontalspur der durch (o, l′) und (k, k′) gelegten Geraden, an dessen Basis (vom Radius o M) die Tangenten N $P_1$ und N $P_2$ zieht, welches sofort die H-Risse der beiden verlangten Berührungsebenen sind. Diese berühren den umhüllenden Kegel in Erzeugenden, deren H-Projektionen mit den Radien o $P_1$ und o $P_2$ zusammenfallen. Die Punkte ($r_1$, $r_1{}'$) und ($r_2$, $r_2{}'$), wo diese den gegebenen Parallelkreis schneiden, sind daher die verlangten Berührungspunkte.

Dann kann man auch die Ebene des Parallelkreises

selbst als horizontale Hülfsebenen benützen und folglich den gegebenen Parallelkreis unmittelbar als Basis des umhüllenden Kegels betrachten. Die durch (k, k') und (o, l') gehende Gerade schneidet diese Ebene in ($\nu$, $\nu'$). Zieht man daher durch $\nu$ an den Parallelkreis g i k g Tangenten, so sind $r_1$ und $r_2$ wieder die verlangten Berührungspunkte.

Endlich kann man sich durch den gegebenen Punkt (k, k') eine horizontale Hülfsebene gelegt denken, welche den umhüllenden Kegel in einem Kreis vom Radius $o'\mu' = o\mu$ schneidet, und, indem man von k, der Horizontalspur der Geraden (o k, l' k'), an diesen Kreis die Tangenten k $q_1$, k $q_2$ und hierauf die Radien o $q_1$ und o $q_2$ zieht, sind die Berührungspunkte ($r_1$, $r_1'$) und ($r_2$, $r_2'$) auf dem Parallelkreis ebenfalls bestimmt.

Die Vertikalrisse der Berührungsebenen zu finden, benützt man am besten horizontale Hauptlinien, die durch irgend einen Punkt derselben, z. B. durch den gegebenen Punkt (k, k') gehen. Ihre vertikalen Spuren $S_1'$ und $S_2'$ gehören dann den verlangten Rissen an, die daher erhalten werden, wenn man $S_1'$ mit $T_1$ und $S_2'$ mit $T_2$ verbindet.

Die letzte Art der angedeuteten drei Auflösungen ist auch dann anwendbar, wenn die Spitze des umhüllenden Kegels nicht mehr auf die Zeichnungsfläche fällt, wenn also die Hülfsgerade (o k, l' k') nicht gezogen und die Spuren N oder $\nu$ nicht angewendet werden können.

**150.** II. Auflösung. Mittelst der eingeschriebenen Kugel.

Um diejenige eingeschriebene Kugel zu bestimmen, die in jedem Punkte des gegebenen Parallelkreises mit dem Ellipsoid die nämliche Berührungsebene hat, ziehe man durch einen Punkt dieser Parallelen die Tangenten (g o, g' l') und die Normale (g o, g' u') an den durch diesen Punkt gehenden Meridian. Das zwischen der Tangente und der Drehachse enthaltene Stück (g o, g' u') der Normale ist dann der Radius der gesuchten Hülfskugel.

Die Berührungsebene an irgend einen Punkt des gegebenen Parallelkreises ist dann für diese Kugel dieselbe wie für das Ellipsoid. Denn als Berührungsebene der Hülfskugel enthält sie die Tangente des Parallelkreises und die Tangente des Kugelmeridians, und als Berührungsebene des Ellipsoides enthält sie ebenso die gemeinschaftliche Tangente des Parallelkreises und die Tangente des Ellipsoidenmeridians, welche aber mit der des Kugelmeridians zusammenfällt. Folglich müssen auch diese beiden Berührungsebenen, da sie durch dieselben Geraden gehen, zusammenfallen.

Um die Berührungsebene an das Ellipsoid zu erhalten, kann man daher zuerst die der eingeschriebenen Kugel suchen.

Dazu verbinde man den gegebenen Punkt (k, k') mit dem Mittelpunkt (o, u') und führe durch diese Gerade und die Drehachse eine Ebene, so wird diese die Kugel in einem größten Kreise, oder also in einem

Meridian schneiden. Denkt man sich hierauf die erwähnte Ebene in eine zur V. E. parallele Lage gedreht, so kömmt auch der Punkt $(k, k')$ nach $(k_1, k_1')$ und die Gerade $(k\,o, k'\,u')$ nach $(k_1\,o, k_1'\,u')$ in eine zur V. E. parallele Lage zu liegen und der Schnittkreis projicirt sich in der V. E. als Hauptmeridian $g'\,v'\,h'\,w'$ in wahrer Größe. Zieht man nun an diesen von $k_1'$ die Tangenten $k_1'\,v'$ und $k_1'\,w'$ und verbindet die Berührungspunkte $v'$ und $w'$ durch eine Gerade, so wird dieß die Vertikalprojektion des auf $(k_1\,o, k_1'\,u')$ senkrecht stehenden Kreises sein, welcher die Berührungspunkte aller Tangenten enthält, die man von $(k_1, k_1')$ aus an die Hülfskugel legen kann. Dieser Kreis schneidet nun aber den gegebenen Parallelkreis $(g\,i\,h, g'\,h')$ in den beiden Punkten $(x_1, x')$ und $(x_2, x')$, welche, wenn die durch den Punkt $(k_1, k_1')$ und die Gerade $(k_1\,o, k_1'\,u')$ gehende Schnittebene wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht wird, nach $(r_1, r_1')$ und $(r_2, r_2')$ zu liegen kommen. Dabei ist $o\,y = o\,y_1$, $r_1, r_2 \perp k\,o$ und $y\,r_1 = y\,r_2 = y_1\,x_1 = y_1\,x_2$ zu machen.

Nachdem die Berührungspunkte auf diese Weise gefunden sind, kann man die Risse der zugehörigen Berührungsebenen wie in der I. Auflösung, oder wie in der obigen Aufgabe (§. 143—144) finden. Da dieselben aber berührend an die Kugel in den betreffenden Berührungspunkten sein müssen, so lassen sie sich auch als Ebenen bestimmen, die durch den gegebenen Punkt $(k, k')$ gehen und auf den zugehörigen Kugelradien $(o\,r_1, u'\,r_1')$ und $(o\,r_2, u'\,r_2')$ senkrecht stehen. Nach einem frühern Lehrsatz (§. 29) sind dann die Risse dieser Ebenen auf den gleichnamigen Projektionen dieser Radien oder ihrer Verlängerungen senkrecht und nach einer darauf bezüglichen frühern Aufgabe (§. 35) ergeben sie sich selbst. Man findet $P_1\,T_1 \perp o\,P_1$ und $T_1\,S_1' \perp u'\,z_1'$ als die Risse der einen, sowie $P_2\,T_2 \perp o\,P_2$ und $T_2\,S_2' \perp u'\,z_2'$ als die Risse der andern Berührungsebene.

**151.** Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Umdrehungsfläche an einen gegebenen Meridian derselben die Risse der beiden möglichen Tangirungsebenen zu finden, Fig. 73.

Auflösung. Denkt man sich der Umdrehungsfläche, welche hier wieder als kreisrundes Ellipsoid angenommen wird, einen Zylinder umgeschrieben, dessen Erzeugende zur Ebene des gegebenen Meridians senkrecht ist, so wird dieser Zylinder das Ellipsoid ringsherum in dem gegebenen Meridian berühren und die Berührungsebene wird in jedem Punkt des Meridians für beide Flächen, für das Ellipsoid und die umhüllende Zylinderfläche, dieselbe sein. Denn die Berührungsebene zur gegebenen Umdrehungsfläche enthält die Tangente des Meridians und die Tangente des zugehörigen Parallelkreises, und die Berührungsebene an den Zylinder enthält ebenfalls die Tangente des Meridians und die dem Berührungspunkt entsprechende Erzeugende dieses Zylinders. Nun ist aber die letztere

nach der Voraussetzung senkrecht zur Meridianebene. Und da auch die Tangente des Parallelkreises im gleichen Punkt senkrecht zur Meridianebene ist (§. 128), so fallen diese beiden Geraden nothwendig in eine Gerade zusammen, und folglich bilden auch die beiden Berührungsebenen nur eine und dieselbe Ebene.

Um also die Berührungsebene durch den gegebenen Punkt an das Ellipsoid zu erhalten, kann man zuerst die Berührungsebene durch denselben an die das Ellipsoid umhüllende Zylinderfläche bestimmen.

Man ziehe daher durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu den Erzeugenden des Zylinders, beziehungsweise eine Senkrechte zu der gegebenen Meridianebene, hierauf vom Begegnungspunkt dieser Geraden mit der Meridianebene Tangenten zu diesem Meridian und lege alsdann durch jene Gerade und je eine dieser Tangenten eine Ebene, so sind dieß die gesuchten Berührungsebenen.

**152.** Es seien nun o, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse, a c, a' b' c' d' die Projektionen des Hauptmeridians und a e c f, a' c' die Projektionen des größten Parallelkreises oder Aequators, ferner seien $a_1 o_1$, $a_1' b' c_1' d'$ die Projektionen des gegebenen Meridians und g, g' die des außerhalb des Ellipsoides gegebenen Punktes. Ziehe (g h, g' h') parallel zur Erzeugenden des Hülfszylinders, also senkrecht zur gegebenen Meridianebene, folglich (nach §. 29) $gh \perp a_1 c_1$ und $g'h' \perp gg'$ oder $\parallel$ zur Projektionsachse und projicire h nach h', so ist (h, h') der Begegnungspunkt der Geraden (g h, g' h') mit der Meridianebene, deren H-Riß mit $a_1 c_1$ zusammenfällt. Durch diesen Punkt (h, h') ziehe nun (nach § 115) Tangenten (h i, h' i') und (h k, h' k') an die Ellipse ($a_1 c_1$, $a_1' b' c_1' d'$) und lege (nach §. 15) durch jede und die Gerade (g h, g' h') eine Ebene, so sind dieß die verlangten Berührungsebenen. Ihre Risse zu erhalten, hat man also nur noch die H-Spuren L und M der beiden Tangenten und die V-Spur N' der Geraden zu suchen. Denn dann sind die durch L und M zu $a_1 c_1$ senkrecht gezogenen Geraden L R und M S die H-Risse und die Verbindungslinien N' R und N' S die V-Risse der beiden gesuchten Berührungsebenen.

Für den Fall, daß die Durchschnittspunkte R und S der H-Risse mit der Achse nicht mehr auf die Zeichnungsfläche fallen, kann man sich auch hier der horizontalen Hauptlinien oder der Tangenten (i p, i' P') und (k q, k' Q') an die Parallelkreise der Berührungspunkte (i, i') und (k, k') bedienen. Ihre V-Spuren P' und Q' liefern dann einen zweiten Punkt zu jedem V-Riß, womit diese dann wieder bestimmt sind. Die erhaltenen V-Risse sind dann in P' und Q' zugleich Tangenten an die elliptische Schnittlinie des umhüllenden Zylinders mit der V. E.

Wäre die V-Projektion $a_1' b' c_1' d'$ des Meridians nicht gegeben, so denke man sich diesen in eine zur V. E. parallele Lage gedreht, so daß er mit dem Hauptmeridian (a c, a' b' c' d') zusammenfällt. Der

Begegnungspunkt (h, h') kommt dann nach ($h_1$, $h_1'$) und die Tangenten (h i, h' i') und (h k, h' k') nach ($h_1$ $i_1$, $h_1'$ $i_1'$) und ($h_1$ $k_1$, $h_1'$ $k_1'$) zu liegen. Bringt man diese alsdann wieder in ihre frühere Lage zurück, so kommen die Berührungspunkte der letztern nach (i, i') und (k, k') und ihre H=Spuren nach L und M zu liegen, womit die H=Risse L R und M S wiederum bestimmt sind. Die V=Risse werden auf gleiche Weise wie oben gefunden.

**153.** Aufgabe. An einen gegebenen Parallelkreis einer gegebenen Umdrehungsfläche, z. B. eines Ellipsoides, die einer gegebenen Geraden parallelen beiden möglichen Tangirungsebenen zu legen, Fig. 74.

Auflösung. Auch diese Aufgabe kann, wie die obige (§. 148), entweder mittelst eines umgeschriebenen Kegels oder mittelst einer eingeschriebenen Kugel gelöst werden.

I. Auflösung. Mittelst des umgeschriebenen Kegels.

Es seien o, $o_1'$ $o_2'$ die Projektionen der Drehachse, a c, a' b' c' d' die Projektionen des Hauptmeridians der gegebenen Umdrehungsfläche und a e c f, a' c' die des größten Parallelkreises, sowie g i h, g' h' die des gegebenen Parallelkreises und h l, h' l' die der gegebenen Geraden, mit welcher die Tangirungsebenen parallel sein sollen.

Ziehe in (g, g') die Tangente (g M, g' m') an den Hauptmeridian (a c, a' b' c' d'), so ist dieß die Erzeugende eines Kegels, der mit dem Ellipsoid im Parallelkreis (g i h, g' h') in allen Punkten dieselbe Tangirungsebene hat (§. 149).

Die zur gegebenen Geraden (k l, k' l') parallelen Tangirungsebenen findet man daher nach Früherem (§. 141), indem man durch den Scheitel des Kegels zu (k l, k' l') eine Parallele und von ihrer Horizontalspur an die Basis des Kegels Tangenten zieht ꝛc. Allein da in unserer Figur der Scheitel des Kegels außerhalb der Zeichnungsfläche fällt, so denke man sich diesen Kegel, ohne ihn zu drehen, in seiner Achsenrichtung so verschoben, daß seine Achse stets mit der Drehachse zusammenfällt und der Scheitel nach einem solchen Punkt derselben zu liegen kommt, der zugänglich und für die Konstruktion bequem ist, wie dieß z. B. beim Punkt (o, b') der Fall ist.

Bei dieser Verschiebung des Kegels bleiben die Berührungsebenen parallel zur gegebenen Geraden und die berührenden Erzeugenden des Kegels behalten ihre Horizontalprojektionen unverändert bei. Es handelt sich also zuerst darum, diese letztern zu finden; denn damit ist die Aufgabe soviel als gelöst.

Nach diesen Erklärungen ziehe durch den angenommenen Punkt (o, b'), als Scheitel des verschobenen Kegels, die Gerade (o N, b' n') parallel (g M, g' m'), der Erzeugungslinie, und (o P, b' p') parallel der gegebenen Geraden (k l, k' l'), bestimme deren horizontale Spuren N und P, beschreibe mit o N einen Kreis N $q_1$ $q_2$, als Basis des verschobenen Kegels, und ziehe

von P an diesen Kreis die Tangenten $P q_1$, $P q_2$ und die zugehörigen Radien $o q_1$, $o q_2$, so sind dieß die H=Projektionen der Erzeugenden, in welchen die gesuchten Tangirungsebenen den umgeschriebenen Kegel berühren. Die Punkte $r_1$, $r_2$, wo diese Projektionen die H=Projektion g i h des gegebenen Parallelkreises durchschneiden, sind daher die H=Projektionen der auf diesem Parallelkreis liegenden Berührungspunkte, deren V=Projektionen nach $r_1'$, $r_2'$ zu liegen kommen.

Die Risse der Berührungsebene an diese zwei Berührungspunkte findet man nun (nach Aufgabe §. 143 bis 144), indem man $T_1$, $T_2$ als H=Spuren der berührenden Erzeugungslinien, resp. der Tangenten an die zugehörigen Meridiane, und $S_1'$, $S_2'$ als V=Spuren der Tangenten an den Parallelkreis sucht und dann $T_1 U_1 \parallel r_1 s_1$ oder $\perp o T_1$, sowie $T_2 U_2 \parallel r_2 s_2$ oder $\perp o T_2$ zieht und $U_1$ mit $S_1'$ und $U_2$ mit $S_2'$, verbindet.

**154.** II. Auflösung. Mittelst der eingeschriebenen Kugel.

Ziehe wieder in (g, g') die Tangente (g M, g' m') an den Hauptmeridian und darauf die Normale (g o, g' v'), so ist dieß der Radius und (o, v') der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, welche, wie schon oben (§. 150) bewiesen worden, für alle Punkte des Parallelkreises (g i h, g' h') mit dem Ellipsoid dieselbe Berührungsebene hat. Denkt man sich nun an diese Kugel alle möglichen, zur gegebenen Geraden parallelen Berührungsebenen gelegt, so werden die Berührungspunkte einen größten Kreis bilden, dessen Ebene zur gegebenen Geraden senkrecht ist. Die gemeinschaftlichen Punkte dieses Berührungskreises und des gegebenen Parallelkreises sind dann offenbar die Berührungspunkte der beiden gesuchten Berührungsebenen.

Es handelt sich also wieder zuerst darum, diese Berührungspunkte zu bestimmen.

Dazu lege durch irgend einen Punkt der Drehachse, z. B. durch (o, b') eine Parallele (o P, b' p') zu der gegebenen Geraden (k l, k' l') und drehe sie in eine zur V. E. parallele Lage ($o P_1$, $b' p_1'$), so wird sich der Berührungskreis der Kugel, dessen Ebene senkrecht zur gegebenen Geraden ist, vertikal als der zu $b' p_1'$ senkrechte Durchmesser $w_1' w_2'$ und die ihm und dem Parallelkreis gemeinschaftlichen Berührungspunkte werden sich vertikal in x' und horizontal nach $x_1$, $x_2$ projiciren. Wird die Gerade ($o P_1$, $b' p_1'$) hierauf wieder in die ursprüngliche Lage (o P, b' p') zurückgebracht, so kömmt $y_1$ nach y und die Sehne $x_1 x_2$ nach $r_1 r_2 \perp o P$ zu liegen. Die Punkte $r_1$, $r_2$, wo die Sehne die H=Projektion g i h des Parallelkreises durchschneidet, sind alsdann die H=Projektionen der verlangten Berührungspunkte. Die V=Projektionen $r_1'$, $r_2'$ ergeben sich damit ohne Weiteres.

Die Risse der beiden entsprechenden Berührungsebenen können dann wie in der vorigen Auflösung bestimmt werden. Sie können aber auch aus der neuen Bedingung abgeleitet werden, daß die Berührungsebenen zu den Kugelradien der Berührungspunkte senk=

recht sein müssen. Nachdem daher in $T_1$ und $T_2$, den H-Spuren der Tangenten an die Meridiane der Berührungspunkte, $T_1 U_1 \perp o T_1$ und $T_2 U_2 \perp o T_2$ gezogen worden sind, ziehe man $U_1 z_1' \perp v' z_1'$ und $U_2 z_2' \perp v' z_2'$, so sind $U_1 T_1$, $U_1 z_1'$ und $U_2 T_2$, $U_2 z_2'$ die Risse der verlangten Berührungsebenen (§. 150).

**155.** Aufgabe. An einen gegebenen Meridian einer gegebenen Umdrehungsfläche einer gegebenen Geraden parallel die beiden möglichen Tangirungsebenen zu finden, Fig. 75.

Auflösung. Wie in der vorletzten Aufgabe (§. 151, Fig. 73) nehme man auch hier einen zum gegebenen Meridian senkrechten und die Umdrehungsfläche in diesem Meridian ringsherum berührenden Zylinder an, so wird dieser, wie in dem angeführten §. bewiesen worden ist, für jeden Punkt des gegebenen Meridians mit der Umdrehungsfläche dieselbe Tangirungsebene haben. Die vorliegende Aufgabe ist somit ebenfalls auf eine frühere Aufgabe über den Zylinder (§. 138) zurückgeführt.

Man ziehe also durch einen Punkt der gegebenen Geraden eine Parallele zu den Erzeugenden des gedachten Zylinders, lege durch diese beiden Geraden eine Ebene und bestimme deren Durchschnittslinie mit der Meridianebene, endlich führe an den Meridian zu diesem Durchschnitt parallele Tangenten, so sind die Berührungspunkte dieser Tangenten zugleich die Berührungspunkte der gesuchten Tangirungsebenen, welche diese Tangenten enthalten und mit der gegebenen Geraden, sowie mit der erwähnten Hülfsebene parallel sind.

Es seien nun $o$, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse, $a c$, $a' b' c' d'$ die Projektionen des Hauptmeridians und $a e c f$, $a' c'$ die Projektionen des größten Parallelkreises, sowie $a_1 c_1$, $a_1' b' c_1' d'$ die des gegebenen Meridians und $g h$, $g' h'$ die der gegebenen Richtungslinie. Die letztere kann aber auch ersetzt werden durch eine Gerade ($b J$, $b' i'$), welche durch einen beliebigen Punkt ($b$, $b'$) der Drehachse mit der gegebenen Geraden ($g h$, $g' h'$) parallel geführt wird. Zieht man dann noch durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden eine Senkrechte zu der gegebenen Meridianebene, so bestimmen diese beiden Geraden ebenfalls eine Hülfsebene, mit der die beiden möglichen Berührungsebenen parallel sind. Zieht man die erwähnte Senkrechte von $J$, der H-Spur der Hülfsgeraden ($b J$, $b' i'$), aus, so erhält man die Gerade $J L$, welche ganz in der H. E. liegt und den H-Riß $a_1 c_1$ des gegebenen Meridians in ($k$, $k'$) senkrecht schneidet. Diese Gerade ist dann zugleich der H-Riß der durch sie und die Gerade ($b J$, $b' i'$) gelegten Hülfsebene, welche die Meridianebene in der Geraden ($b k$, $b' k'$) schneidet. Zieht man damit an den gegebenen Meridian ($a_1 c_1$, $a_1' b' c_1' d'$) parallele Tangenten, so sind die Berührungspunkte ($m$, $m'$) und ($n$, $n'$) derselben zugleich die Berührungspunkte der zugehörigen Berührungsebenen mit dem gegebenen

Meridian des Ellipsoides und ihre H=Spuren P und Q sind überdieß Punkte der gleichnamigen Risse PT und QU der Berührungsebenen, welche somit, da sie zu $a_1 c_1$ senkrecht sein müssen, bestimmt sind. Die V=Risse TR' und US' erhält man endlich mittelst der V=Spuren R' und S' der durch die Berührungspunkte an die Parallelkreise gelegten Tangenten oder horizontalen Hauptlinien (m r, m' R') und (n s, n' S'). Dieselben müssen in R' und S' zugleich Tangenten an die Ellipse sein, worin der umhüllende Zylinder von der V. E. geschnitten wird.

Denkt man sich den gegebenen Meridian ($a_1 c_1$, $a_1' b' c_1' d'$), die Gerade (b k, b' k') in eine zur V. E. parallele Lage gedreht, so fällt ersterer mit dem Hauptmeridian (a c, a' b' c' d') zusammen und die letztere kommt nach (b $k_1$, b' $k_1'$) zu liegen. Zieht man hierauf mit (b $k_1$, b' $k_1'$) parallele Tangenten an den Hauptmeridian, so sind ($m_1$, $m_1'$) und ($n_1$, $n_1'$) die Berührungspunkte und ($P_1$, $p_1'$), ($Q_1$, $q_1'$) die H=Spuren derselben in der gedrehten, zur V. E. parallelen Lage. Bringt man alsdann die Meridianebene sammt Tangenten in ihre frühere Lage zurück, so kommen die Berührungspunkte nach (m, m'), (n, n') auf die durch ($m_1$, $m_1'$), ($n_1$, $n_1'$) gezogenen Parallelkreise und die H=Spuren nach P und Q auf den H=Riß der gegebenen Meridianebene zu liegen, und man sieht, daß man mittelst dieser Hülfskonstruktion die V=Projektion $a_1' b' c_1' d'$ des gegebenen Meridians auch hier umgehen kann.

**156.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Umdrehungsfläche, z. B. eines Ellipsoides, sowie die Projektionen eines Punktes außerhalb derselben gegeben, man soll die Projektionen des von letzterm an erstere geführten umhüllenden Kegels, sowie der Berührungskurve bestimmen, Fig. 76.

Auflösung. Denkt man sich vom gegebenen Punkt an die gegebene Umdrehungsfläche eine Tangente gezogen und diese an derselben rings herum geführt, so daß sie stets durch den gegebenen Punkt geht und an die Umdrehungsfläche Tangente bleibt, so erzeugt dieselbe eine umhüllende Kegelfläche, die das Ellipsoid im Allgemeinen in einer Ellipse berührt. Die Aufgabe reduzirt sich nun darauf, die Projektionen dieser Ellipse zu finden; denn sind diese einmal gefunden, so erhält man die Projektionen des umhüllenden Kegels selbst, wenn man von den Projektionen des gegebenen Punktes an die Projektionen der Ellipse, die im vorliegenden Falle selbst wieder Ellipsen sind, berührende Tangenten zieht.

Es seien daher o, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse, a c, a' b' c' d' die Projektionen des Hauptmeridians und a e c f, a' c' die Projektionen des größten Parallelkreises und (g, g') die Projektionen des gegebenen Punktes.

Denkt man sich das Ellipsoid durch eine Reihe von Parallelkreisen oder Meridianen geschnitten und nach den vorausgehenden Aufgaben (§. 148—150 und

§. 151—152, Fig. 72 und 73) die Berührungspunkte der zugehörigen, durch den gegebenen Punkt gehenden Berührungsebenen bestimmt und sämmtliche auf diese Weise erhaltenen Punkte durch eine stetige Kurve aus freier Hand verbunden, so ist dieß die verlangte Berührungskurve des umhüllenden Kegels mit dem gegebenen Ellipsoid.

In unserer Figur sind, wie man sieht, für einige Parallelkreise die bei der oben erwähnten ersten Aufgabe (§. 148—150) erklärten Methoden mittelst eines umgeschriebenen Kegels und einer eingeschriebenen Kugel durch Hülfslinien angedeutet. Eine Wiederholung der Erklärung halten wir jedoch für überflüssig. Indessen wollen wir die Bestimmung der besondern Punkte noch besonders erklären.

Als solche sind hervorzuheben: die beiden Berührungspunkte auf dem Aequator oder dem größten Parallelkreis, die beiden auf dem Hauptmeridian gelegenen Berührungspunkte und der höchste und tiefste Berührungspunkt oder die beiden Berührungspunkte, die auf demjenigen Meridian liegen, dessen Ebene verlängert durch den gegebenen Punkt geht.

**157.** Um die auf dem Aequator liegenden Berührungspunkte zu erhalten, hat man von g, der H-Projektion des gegebenen Punktes, an den Kreis a e c f, der H-Projektion des Aequators, die Tangenten g h, g i zu ziehen. Die Punkte h, i sind dann die H-Projektionen und h', i' die V-Projektionen der verlangten Berührungspunkte auf dem Aequator. Es sind dieß die Berührungspunkte jener Berührungsebenen, die zur H. E. senkrecht sind, und deren H-Risse mit den Tangenten g h, g i zusammenfallen.

Ebenso erhält man unmittelbar die Berührungspunkte auf dem Hauptmeridian, indem man von g', der V-Projektion des gegebenen Punktes, an a' b' c' d', der V-Projektion des gegebenen Hauptmeridians die Tangenten g' k', g' l' zieht und die Punkte k', l' horizontal nach k, l projicirt. Die erhaltenen Punkte (k, k'), (l, l') sind zugleich die Berührungspunkte derjenigen Berührungsebenen, die zur V. E. senkrecht sind und deren V-Risse mit den Tangenten g' k', g' l' zusammenfallen.

Um endlich auch die Berührungspunkte auf dem Meridian zu finden, dessen Ebene durch den gegebenen Punkt geht, und die Berührungskurve in zwei symmetrische Hälften theilt, genügt es, an diesen Meridian vom gegebenen Punkt zwei Tangenten zu ziehen und ihre Berührungspunkte zu bestimmen. Zu diesem Behufe drehe man den durch den gegebenen Punkt (g, g') gehenden Meridian zuerst in eine zur V. E. parallele Lage, in welcher er mit dem Hauptmeridian zusammenfällt. Bei dieser Umdrehung kommt der gegebene Punkt nach ($g_1$, $g_1'$) zu liegen. Von $g_1'$, der V-Projektion dieses Punktes, ziehe an a' b' c' d', der V-Projektion des gedrehten, nun mit dem Hauptmeridian zusammenfallenden, Meridians die Tangenten $g_1' m_1'$, $g_1' n_1'$ und projicire die Punkte $m_1'$, $n_1'$ horizontal

nach $m_1$, $n_1$. Dreht man hernach die Meridianebene wieder in ihre frühere Lage zurück, so kommen die Punkte ($m_1$, $m_1'$), ($n_1$, $n_1'$) nach (m, m'), (n, n') zu liegen, welches nun die verlangten Punkte auf dem durch den gegebenen Punkt gehenden Meridian sind, von denen der erste zugleich der niederste und der andere der höchste der Berührungskurve ist. Da die Parallelkreise unter (m, m') und über (n, n'), folglich keine Berührungspunkte mehr liefern, so ist es zweckmäßig, diese beiden Punkte zuerst zu suchen.

**158.** Aufgabe. Es sind die Projektionen einer Umdrehungsfläche, z. B. eines Ellipsoides, sowie die Projektionen einer Geraden außerhalb derselben gegeben; man soll die Projektionen des der gegebenen Geraden parallelen, das Ellipsoid umhüllenden Zylinders und dessen Berührungskurve mit dem gegebenen Ellipsoid bestimmen, Fig. 77.

Auflösung. Man denke sich das Ellipsoid wieder durch eine Reihe von Parallelkreisen oder Meridianebenen geschnitten und nach den frühern Aufgaben (§. 153—154 und §. 155, Fig. 74 und 75) die Berührungspunkte derselben mit den entsprechenden, der gegebenen Geraden parallelen Berührungsebenen gesucht. Die Verbindungslinie aller dieser Berührungspunkte ist dann die verlangte Berührungskurve des umhüllenden Zylinders mit dem Ellipsoid. In unserer Figur sind für einige Parallelkreise die in Aufgabe §. 153 (Fig. 74) erklärte Methode mittelst eines umgeschriebenen Kegels ebenfalls durch Hülfslinien angedeutet. Die Erklärungen können hier aber füglich übergangen werden. Dagegen sollen die besondern Punkte, d. h. die Berührungspunkte auf dem Aequator, dem Hauptmeridian und dem zur gegebenen Geraden parallelen Meridian, auch hier noch extra gesucht werden.

**159.** Die beiden Berührungspunkte auf dem Aequator findet man sofort, indem man zu g h an den Kreis a e c f parallele Tangenten zieht und die Punkte t und u vertikal nach t' und u', auf die V-Projektion a' c' des Aequators, projicirt. Die Punkte (t, t') und (u, u') sind alsdann die Berührungspunkte auf dem Aequator.

Ebenso erhält man sofort die Berührungspunkte (v, v'), (w, w') auf dem Hauptmeridian, indem man zu g' h' an die V-Projektion a' b' c' d' des Hauptmeridians parallele Tangenten zieht und die Berührungspunkte v' und w' horizontal nach v und w projicirt.

Endlich, um auch die Berührungspunkte auf dem zur gegebenen Geraden parallelen Meridian zu finden, von denen der eine wieder der höchste und der andere der tiefste Punkt der Berührungskurve ist, denke man sich an diesen Meridian mit der gegebenen Geraden parallele Tangenten gezogen. Ihre Berührungspunkte sind dann die verlangten Punkte. Zu diesem Behufe ziehe man durch einen beliebigen Punkt (b, b') der Drehachse mit der gegebenen Geraden (g h, g' h')

eine Parallele (b X, b′x′) und drehe sie sammt dem Meridian in eine zur V. E. parallele Lage ($b X_1$, $b' x_1'$). Mit der V-Projektion $b' x_1'$ ziehe hierauf an den Hauptmeridian a′ b′ c′ d′ parallele Tangenten und projicire die Berührungspunkte $y_1'$, $z_1'$ horizontal nach $y_1$, $z_1$. Wird alsdann der Meridian sammt Tangenten wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgedreht, so kommen die Punkte ($y_1$, $y_1'$), ($z_1$, $z_1'$) nach (y, y′), (z, z′) zu liegen, welches somit die verlangten Berührungspunkte auf dem zur gegebenen Geraden parallelen Meridian sind.

Daß diese Punkte wirklich der tiefste und höchste Punkt der Berührungskurve sind, läßt sich einfach wie folgt darthun. Man denke sich die für den Parallelkreis (i r k, i′ k′) angegebenen Konstruktionen auch auf solche Parallelkreise angewendet, welche höher als der Punkt (z, z′) und tiefer als der Punkt (y, y′) liegen. Dann kömmt, wie man leicht sieht, die H-Spur (wie N) der mit der gegebenen Geraden durch die Spitze des Hülfskegels gezogenen Parallelen innerhalb der Basis dieses Hülfskegels zu liegen. Die Tangenten (wie N P, N Q) sind also unmöglich und daher kann ein solcher Parallelkreis auch keine Berührungspunkte (wie r, r′ und s, s′) liefern.

**160.** Was die Ausführung der beiden letzten Figuren betrifft, so mag noch besonders bemerkt werden, daß die umhüllenden Flächen (der Kegel und Zylinder) als wirklich vorhanden gedacht und daher diejenigen Theile der Berührungskurve und der Umrisse des Ellipsoids, welche von ihnen eingeschlossen und verdeckt werden, nach den früher angegebenen Zeichnungsregeln (II. 1, §. 26) punktirt, die übrigen, sichtbaren, Theile dagegen ausgezogen worden sind. In der letzten Figur wird das Ellipsoid vom Zylinder ganz umhüllt, deßhalb dessen Umrisse auch ganz punktirt worden sind. Auch ist der umhüllende Zylinder bis zur H. E. verlängert und die Durchschnittskurve desselben mit dieser gezeichnet worden.

**161.** Aufgabe. Es seien die Projektionen, oder auch nur die Drehachse und eine zur V. E. parallele Erzeugende des windschiefen einmanteligen Hyperboloids, sowie die H-Projektion eines Punktes auf dessen Oberfläche gegeben; man soll die zugehörige Berührungsebene bestimmen, Fig. 78.

Auflösung. Nach dem, was bereits oben (§. 124 und 129) über die Berührungsebenen an windschiefe Flächen gesagt worden ist, erhält man die Berührungsebene für jeden Punkt einer solchen Fläche, indem man durch diesen Punkt die beiden zugehörigen Erzeugenden zieht und durch sie eine Ebene legt. Diese Ebene berührt dann die gegebene windschiefe Fläche in dem gegebenen Punkt und durchschneidet dieselbe längs den beiden Erzeugenden.

Es seien daher o, $o_1' o_2'$ die Projektionen der Drehachse und J k, i′ k′ die Projektionen der zur V. E. parallelen Erzeugenden des einen Systems.

Beschreibt man mit o J einen Kreis $A_1$ B $C_1$ D, so ist dieß die Basis des Hyperboloids, welche die H-Spuren aller Erzeugenden enthält, und zieht man hierauf mit o h ⊥ J k einen Kreis e f g h, so ist dieß die H-Projektion des kleinsten Parallelkreises oder des Kehlkreises, dessen V-Projektion e′ g′ durch h′, wo die V-Projektion i′ k′ der gegebenen Erzeugenden die V-Projektion $o_1{}'$ $o_2{}'$ der Drehachse durchschneidet, parallel zur Projektionsachse geht.

Im Weitern sei l die gegebene H-Projektion eines Punktes auf der Oberfläche des Hyperboloids, an den die zugehörige Berührungsebene gefunden werden soll. Diese zu finden, bestimme man nun vor Allem die V-Projektion des gegebenen Punktes. Dieß geschieht ähnlich wie in den frühern Aufgaben beim Zylinder (§. 135, Fig. 63), beim Kegel (§. 139, Fig. 66) und beim Ellipsoid (§. 143, Fig. 69).

Da alle Erzeugenden in der H. E. den Kehlkreis e f g h berühren, so sind die von l aus an diesen Kreis geführten Tangenten P V, Q W offenbar die Horizontalprojektionen zweier Erzeugenden, die durch den Punkt gehen, dessen H-Projektion l ist. Indem man die Berührungspunkte m und n nach m′ und n′ auf die V-Projektion e′ g′ des Kehlkreises, P und W nach $p_1{}'$ und $w_2{}'$ in die Achse $a_1{}'$ $c_1{}'$ und V und Q nach $v_1{}'$ und $q_2{}'$ in die damit parallele Gerade $a_2{}'$ $c_2{}'$ projicirt und die Punkte $p_1{}'$, $v_1{}'$, sowie $w_2{}'$, $q_2{}'$ verbindet, so werden die Verbindungslinien nicht nur durch m′, beziehungsweise durch n′ gehen, sondern sich zugleich in einem Punkt $l_1{}'$ durchschneiden, welches nun die V. P. des zu l gehörigen Punktes ist. Zur Probe muß darum $l_1{}'$ in der Projektionslinie liegen, die man durch l senkrecht zur Achse zieht.

Der gegebenen H-Projektion l entspricht aber noch die V-Projektion $l_2{}'$ eines zweiten Punktes, durch den zwei Erzeugende gehen, deren H-Projektionen ebenfalls mit P V und W Q zusammenfallen. Die V-Projektionen dieser Erzeugenden, die durch das Projiciren der Punkte P und W nach $p_2{}'$ und $w_1{}'$ auf $a_2{}'$ $c_2{}'$ und der Punkte Q und V nach $q_1{}'$ und $v_2{}'$ in die P-Achse und das nachherige Verbinden dieser Punkte erhalten werden, sind dann $p_2{}'$ $v_2{}'$ und $q_1{}'$ $w_1{}'$, die zur Probe wieder durch m′ und n′, sowie durch $l_2{}'$ gehen.

Ebenso entspricht auch der gegebenen Erzeugenden (J k, i′ k′) des ersten Systems noch eine zweite, durch (h, h′) gehende Erzeugende (X y, x′ y′) des zweiten Systems.

**162.** Die Risse der Berührungsebenen an die beiden Punkte (l, $l_1{}'$) und (l, $l_2{}'$) ergeben sich nun wie folgt. Die Berührungsebene des Punktes (l, $l_1{}'$) ist bestimmt durch die beiden zugehörigen Erzeugenden (P V, $p_1{}'$ $v_1{}'$) und (Q W, $q_2{}'$ $w_2{}'$) und die Berührungsebene des Punktes (l, $l_2{}'$) ist ebenso bestimmt durch die zugehörigen Erzeugenden (P V, $p_2{}'$ $v_2{}'$) und (Q W, $q_1{}'$ $w_1{}'$). Bestimmt man daher die Spuren dieser Geraden, so sind damit auch (nach §. 9) die Risse

der gesuchten Ebenen bestimmt. Die V-Spuren der Erzeugenden können indessen auch umgangen werden. Denn da jede Berührungsebene auch die Tangente an den zugehörigen Parallelkreis enthält, so kann auch nur die V-Spur dieser Tangenten gesucht und benützt werden. Die Verbindungslinie o l ist der Radius der zu (l, $l_1'$) und (l, $l_2'$) gehörigen Parallelkreise. Die dazu errichtete Senkrechte l s ist folglich die H-Projektion der zugehörigen Tangenten, deren V-Projektionen die durch $l_1'$ und $l_2'$ zur Achse parallel gezogenen Geraden und deren V-Spuren die Punkte $S_1'$ und $S_2'$ sind.

Die H-Spuren der durch (l, l') gehenden Erzeugenden fallen mit P und W und die H-Spuren der durch (l, $l_2'$) gehenden Erzeugenden mit Q und V zusammen. Die Verbindungslinien P T und Q U sind mithin die H-Risse und die Verbindungslinien T $S_1'$ und U $S_2'$ die V-Risse der zugehörigen Berührungsebenen.

Da die in (m n, m' n') projicirte Gerade beiden Berührungsebenen angehört, so ist auch ihre V-Spur R' beiden V-Rissen gemein und dient somit zur Probe dieser Risse.

## IV.

### Durchschnittskonstruktionen der Körper mit Körpern.

**163.** Soll die Durchschnittsfigur irgend eines Körpers oder einer krummen Fläche mit einem andern Körper oder einer andern krummen Fläche bestimmt werden, so denke man sich beide Körper oder krumme Flächen durch ein System von Hülfsebenen oder, wo dieß nicht angeht, auch von gewissen krummen Flächen geschnitten und die Schnittlinien einer jeden dieser Ebenen oder krummen Flächen mit beiden Körpern oder krummen Flächen konstruirt.

Die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Durchschnittslinien derselben Hülfsfläche gehören alsdann der gesuchten Durchschnittsfigur der beiden sich durchschneidenden Körper oder krummen Flächen an. Verbindet man daher alle auf die angedeutete Weise erhaltenen Punkte in gehöriger Ordnung, so erhält man die verlangte Durchschnittsfigur der beiden gegebenen Körper oder krummen Flächen selbst. Schneiden sich die beiden Schnittlinien derselben Hülfsfläche nicht, so ist dieß ein Zeichen, daß sich auch die Körper selbst nach dieser Fläche nicht schneiden. Und berühren sich die Schnittlinien in einem Punkt, so haben die beiden Körper nach dieser Fläche auch nur einen Berührungspunkt gemein.

**164.** Je nach der Gestalt und Lage der sich schneidenden Körper oder krummen Flächen führt das im vorigen §. angedeutete allgemeine Verfahren zur Bestimmung der Durchschnittsfigur derselben zu einer einfachern oder zusammengesetztern Konstruktion.

Bei den polyedrischen Gestalten (den Prismen und Pyramiden), sowie bei den entwickelbaren krummen

Flächen (und insbesondere bei den Zylinder- und Kegelflächen) läßt sich die Konstruktion ihres Durchschnitts immer am einfachsten mittelst eines Systems von Hülfsebenen ausführen, deren Lage in jedem einzelnen Falle besonders zu bestimmen ist.

Sind die sich schneidenden Körper Prismen oder Zylinder, so eignen sich zur Konstruktion ihrer Durchschnittsfigur am besten solche Hülfsebenen, die den Kanten der Prismen oder den Erzeugenden der Zylinder parallel sind; sind dieselben aber Pyramiden oder Kegel, so eignen sich hiezu am besten solche Ebenen, die durch beide Spitzen der Pyramiden oder Kegel gehen; und endlich sind sie ein Prisma oder ein Zylinder und eine Pyramide oder ein Kegel, so eignen sich dazu am besten solche Hülfsebenen, die durch die Spitze der Pyramide oder des Kegels gehen und zugleich den Kanten des Prisma's oder den Erzeugenden des Zylinders parallel sind. Denn in allen diesen Fällen schneidet die durch irgend eine Kante oder Erzeugende des einen Körpers gelegte Hülfsebene den andern Körper stets in einer Geraden, die den Kanten des Prisma's oder den Erzeugenden des Zylinders parallel ist oder von einem Punkt der Basis nach der Spitze der Pyramide oder des Kegels läuft. Die Punkte, worin diese Geraden von der betreffenden Kante oder Erzeugungslinie geschnitten werden, sind dann Punkte der verlangten Durchschnittskurve.

**165.** Bei den Umdrehungsflächen richtet sich die Konstruktion der Durchschnittskurve vorzugsweise nach der Lage ihrer Drehungsachsen zueinander und zu den Projektionsebenen.

Sind ihre Drehungsachsen zueinander parallel und zugleich zu einer, z. B. zur H. E. senkrecht, so eignen sich zur Konstruktion der Durchschnittsfigur am besten horizontale Hülfsebenen. Denn diese schneiden beide Drehungsflächen in Parallelkreisen, die sich in der V. E. als Geraden gleich dem Durchmesser und parallel zur P-Achse und in der H. E. als Kreise in wahrer Größe projiciren. Die Punkte, in welchen sich diese Kreise durchschneiden, sind alsdann Punkte der gesuchten Durchschnittsfigur.

**166.** Schneiden sich dagegen zwei Drehungsflächen, deren Drehungsachsen sich schneiden, von denen also nur die eine derselben zu einer P. E., zum Beispiel zur H. E., senkrecht angenommen werden kann, während die andere schief zu ihr ist, beide jedoch zur andern P. E., also zur V. E. parallel angenommen werden können, so läßt sich die Aufgabe ihres Durchschnittes am einfachsten dadurch lösen, daß man statt der Hülfsebenen Hülfskugeln anwendet, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt der beiden Drehachsen zusammenfällt. Denn dann schneiden diese Hülfskugeln beide Drehungsflächen in Parallelkreisen, deren Durchschnittspunkte wiederum Punkte der Durchschnittsfigur beider Drehungsflächen liefern.

**167.** Sind hingegen die Drehachsen beider Drehungs-

körper, z. B. zweier Ellipsoide, nicht in einer Ebene liegend, also nicht parallel und auch nicht in einem Punkte sich schneidend, so lassen sich weder Hülfsebenen noch Hülfskugeln auffinden, welche beide Drehungskörper zugleich in Parallelkreisen schnitten.

In diesem allgemeinsten Falle läßt sich die Konstruktion des Durchschnittes indessen wenigstens einigermaßen dadurch vereinfachen, daß man die Drehachse des einen Drehungskörpers wieder senkrecht zur H. E. und die Drehachse des andern, wie die des erstern, parallel zur V. E. annimmt und sich alsdann horizontaler Hülfsebenen bedient.

Eine solche Hülfsebene schneidet zwar nur den einen Drehungskörper in einem Parallelkreise, während der andere von ihr in einer Kurve geschnitten wird, die punktweise konstruirt werden muß. Indessen erhält man auch diese Kurve doch ziemlich leicht, wenn auch etwas umständlich, indem man sich einer Reihe von Hülfsebenen bedient, die zur Drehachse des zweiten Drehungskörpers senkrecht sind und diesen daher in Parallelkreisen und die entsprechenden horizontalen Hülfsebenen in Geraden durchschneiden, welche ihrerseits den zugehörigen horizontalen Parallelkreis je in zwei Punkten durchschneiden. Verbindet man hierauf diese Punkte durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand, so erhält man die fragliche Hülfskurve mit dem zweiten Drehungskörper. Und die Punkte, worin diese vom zugehörigen Parallelkreis oder der Schnittlinie derselben horizontalen Hülfsebene mit dem ersten Drehungskörper geschnitten wird, sind dann endlich zwei Punkte der gesuchten Durchschnittskurve beider Drehungsflächen. Auf gleiche Weise erhält man beliebig viele andere Punkte der Durchschnittsfigur und durch gehörige Verbindung derselben diese selbst.

**168.** Die Aufgabe des Durchschnitts zweier Umdrehungsflächen, deren Achsen nicht in einer Ebene liegen, läßt sich übrigens bei der gleichen Annahme ihrer Drehachsen in Bezug auf die Projektionsebenen wie im vorigen §. auch durch vertikale Hülfsebenen lösen, die mit den Hauptmeridianen derselben, also auch mit der V. E. parallel sind. Denn eine jede dieser Hülfsebenen durchschneidet beide Oberflächen in krummen Linien, die mit den Hauptmeridianen ähnliche und ähnlichliegende Figuren sind und daher konstruirt werden können, wenn man bloß einen Punkt ihrer Achsen oder Durchmesser kennt.

Sind die beiden Drehungskörper Ellipsoiden, so sind die Durchschnittslinien einer jeden derartigen Hülfsebene mit denselben E l l i p s e n, die den Hauptellipsen oder den elliptischen Hauptmeridianen ähnlich und zu ihnen ähnlich gelegen sind. Ihre Durchschnittspunkte gehören dann ebenfalls der verlangten Durchschnittskurve beider Drehungsflächen an.

**169.** Wird eine Rotationsfläche von einer scheitrechten Fläche durchschnitten, so kann man zur Bestimmung ihrer Durchschnittsfigur, je nach ihrer Gestalt und ihrer gegenseitigen Lage, Hülfsebenen, Hülfs-

kegel oder Hülfszylinder anwenden. Wo es indessen angeht, zieht man auch hier die Hülfsebenen den krummen Hülfsflächen vor.

Ist die scheitrechte Fläche z. B. eine Kegel- oder Zylinderfläche mit kreisförmiger Basis, die zur H. E. parallel ist oder in ihr selbst liegt, und wird die Drehachse der Rotationsfläche, wie bisher, zur H. E. senkrecht angenommen, so ist es zur Konstruktion ihres Durchschnitts immer am einfachsten, sich horizontaler Hülfsebenen zu bedienen. Denn diese schneiden alsdann beide krummen Flächen in Kreisen, die, wie in §. 165, leicht zu ermitteln sind.

**170.** Ist die scheitrechte Fläche hingegen eine Kegelfläche mit beliebiger, z. B. elliptischer Basis und fällt deren Spitze zudem nicht in die Drehachse der Drehungsfläche, so eignen sich zur Konstruktion des Durchschnittes am besten Hülfskegel, deren Spitze mit der Spitze des gegebenen Kegels zusammenfällt und deren Leitende als ein Parallelkreis des Drehungskörpers angenommen wird.

Ein solcher Hülfskegel schneidet alsdann den gegebenen Kegel in zwei Geraden und zwar in zwei Erzeugenden und diese den zugehörigen Parallelkreis der Drehungsfläche in zwei Punkten, die der gesuchten Durchschnittsfigur angehören.

**171.** Und ist die scheitrechte Fläche eine Zylinderfläche von beliebiger Basis, deren Erzeugende zur Drehachse der Drehungsfläche beliebig geneigt ist, so eignen sich zur Konstruktion des Durchschnitts am besten Hülfszylinder, deren Erzeugende zur Erzeugenden des gegebenen Zylinders parallel ist und deren Leitende wieder mit einem Parallelkreis des gegebenen Drehungskörpers zusammenfällt. Ein solcher Hülfszylinder schneidet den gegebenen Zylinder ebenfalls in zwei Erzeugenden und diese den zugehörigen Parallelkreis in zwei Punkten, die alsdann wieder der verlangten Durchschnittsfigur angehören.

**172.** Sind endlich die beiden sich durchschneidenden Flächen windschief, so ist es zur Bestimmung ihres Durchschnitts am einfachsten, sich eines Systems von Hülfsebenen zu bedienen, welche durch die geradlinigen Erzeugenden der einen von ihnen gehen und zugleich zu einer der Projektionsebenen senkrecht stehen. Eine solche Ebene schneidet die zweite windschiefe Fläche im Allgemeinen in einer ebenen krummen Linie. Und die Punkte, worin diese von der zugehörigen Geraden der ersten windschiefen Fläche geschnitten wird, durch welche die Hülfsebene geht, sind dann zwei Punkte der gesuchten Durchschnittsfigur. Durch Wiederholung weiterer Hülfsebenen erhält man andere Punkte der Durchschnittsfigur und durch gehörige Verbindung derselben diese selbst.

**173.** Im Vorigen haben wir im Allgemeinen das Verfahren angedeutet, wie die Durchschnittsfigur zweier sich durchschneidenden Körper oder zweier sich durchschneidenden krummen Flächen, je nach Verschie-

denheit ihrer Gestalt und gegenseitigen Lage, am einfachsten und besten aufgefunden werden kann. Im Folgenden sollen nun über die dabei vorkommenden wichtigsten Fälle spezielle Beispiele ausgeführt werden.

In Bezug auf die Art des Durchschnitts mag indessen noch vorher bemerkt werden, daß die beiden sich durchschneidenden Körper oder krummen Flächen sich entweder gänzlich durchdringen oder sich nur theilweise ausschneiden. Im letzten Fall, bei einer theilweisen Ausschneidung, bildet die Schnittfigur eine zusammenhängende, in sich geschlossene Linie, während sie im ersten Fall, bei einer gänzlichen Durchdringung, aus zwei getrennten Stücken besteht. Was ihre Gestalt betrifft, so hängt dieselbe von der Gestalt und Lage der sich schneidenden Körper selbst ab. Im Allgemeinen bildet sie aber eine gewundene Linie und nur in gewissen besondern Fällen geht sie über in eine ebene Figur. Sind die sich schneidenden Körper polyedrische Gestalten, so ist die Durchschnittslinie eine gebrochene geradlinige Figur. Sind dieselben aber von krummen Flächen eingeschlossen, so bildet sie eine stetige krumme Linie, die im Allgemeinen, wie schon oben (in der Anmerkung zu §. 95) bemerkt worden, von der vierten Ordnung ist, in einzelnen speziellen Fällen aber auch in eine Linie von nur halb so hoher Ordnung, d. i. in eine Linie zweiter Ordnung übergehen kann. In diesem Fall kann sich alsdann die Durchschnittsfigur auch als Gerade projiciren, während sie sich im andern Fall auf jeder P. E. stets als Kurve darstellen wird.

Die folgenden Beispiele werden auch diese Erklärungen noch mehr verdeutlichen und zur Anschauung bringen.

a. Durchschnittskonstruktionen der Prismen, Pyramiden, Zylinder und Kegel unter sich.

**174.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittsfigur zweier sich durchschneidenden Pyramiden oder Kegel zu finden, wenn diese durch ihre Projektionen gegeben sind, Fig. 81 und 82.

Auflösung. Es seien A B C D E f, a′b′c′d′e′f′ die Projektionen der einen und G H J K L m, g′h′i′k′l′m′ die Projektionen der andern Pyramide, Fig. 81, resp. des einen und andern Kegels, Fig. 82. Um die Projektionen der Durchschnittsfigur beider Pyramiden oder Kegel zu erhalten, denke man sich durch die einzelnen Kanten der Pyramiden oder Erzeugenden der Kegel Hülfsebenen gelegt, die (nach §. 164) zugleich durch beide Spitzen derselben gehen und die andere Pyramide oder den andern Kegel in Geraden schneiden, die von einem Punkte der Basis nach der Spitze zulaufen.

Man ziehe daher durch die beiden Spitzen (f, f′) und (m, m′) eine Gerade (m f, m′f′), welche, gehörig verlängert, die H. E. in (N, n′) schneidet, und von der horizontalen Spur N durch die Punkte

A, B, C,..., G, H, J,... beider Basen die Geraden NA, NB, NC,..., NG, NH, NJ,..., so sind dieß die H-Risse der durch die einzelnen Kanten oder Erzeugenden gelegten Hülfsebenen.

Aus der Lage dieser Risse erkennt man sofort, ob die durch irgend eine Kante oder Erzeugende des einen Körpers gelegte Hülfsebene den andern Körper wirklich schneidet oder nicht.

Schneidet nämlich der H-Riß einer solchen Ebene, wie z. B. NB, der durch den äußersten Punkt B der Basis des ersten Körpers geht, die Basis GHJKL des zweiten Körpers nicht, so schneidet auch die zugehörige Kante, resp. Erzeugende (Bf, b′f′), durch welche die entsprechende Hülfsebene geht, den andern Körper nicht.

Schneidet aber ein Riß, wie NH, der durch irgend einen Punkt H der Basis GHJKL des zweiten Körpers geht, die Basis ABCDE des ersten Körpers in zwei Punkten O und P, so wird die durch die Kante, resp. Erzeugende (Hm, h′m′) des zweiten Körpers gelegte Hülfsebene die Oberfläche des ersten Körpers auch in zwei Geraden (Of, o′f′) und (Pf, p′f′) durchschneiden und diese werden dann auf der zugehörigen Kante oder Erzeugenden (Hm, h′m′) die beiden Durchschnittspunkte (q, q′) und (r, r′) bestimmen.

Auf gleiche Weise findet man die Durchschnittspunkte aller übrigen Kanten oder Erzeugenden.

**175.** Bei den Kegelflächen, Fig. 82, und ebenso im Folgenden bei allen sich durchschneidenden krummen Flächen hat man die Durchschnittspunkte, welche den berührenden Erzeugenden angehören, immer besonders in's Auge zu fassen und zu konstruiren, was übrigens auf dieselbe Art wie bei den übrigen Durchschnittspunkten geschieht.

Auf diese Weise erhält man, außer den schon bestimmten Punkten (q, q′) und (r, r′), die Punkte (y, y′) und (z, z′) auf der Berührungslinie (Wf, w′f′), sowie je zwei Punkte auf den Erzeugenden, die wie (Cf, c′f′), (Ef, e′f′) in der H. E. und wie (Df, d′f′), (Af, a′f′) in der V. E. zum Umriß der Projektion gehören. Von diesen Punkten sind indessen, um die Figur nicht zu sehr mit Buchstaben zu überladen, nur noch die Punkte (u, u′) und (v, v′) auf der Erzeugenden (Df, d′f′) und den Schnittlinien (Sm, s′m′) und (Tm, t′m′) besonders bezeichnet worden.

**176.** Bei diesen Durchschnittskonstruktionen hat man ferner darauf zu sehen, ob die Körper sich gänzlich durchdringen, wie die Pyramiden in Fig. 81, oder sich nur theilweise ausschneiden wie die Kegel in Fig. 82.

Dieß erkennt man sofort, nachdem man an beide Basen die äußersten Risse gezogen hat. Trifft es sich, wie bei den Pyramiden in Fig. 81, daß die äußersten Risse NB und NE an die eine Basis ABCDE

die andere Basis GHJKL ganz einschließen, so wird der Körper der letztern jenen der erstern ganz durchdringen. Liegen hingegen die Basen beider Körper so, wie die Kegel in Fig. 82, daß einerseits die Tangente NB an die eine Basis die andere Basis nicht mehr schneidet, während anderseits die Tangente NW diese in zwei Punkten K und X schneidet, so schneiden sich beide Körper nur theilweise aus.

Im ersten Fall, bei einer gänzlichen Durchdringung, wie in Fig. 81, besteht die Durchschnittsfigur, wie bereits früher (§. 173) bemerkt worden ist, aus zwei getrennten Theilen, einer Eintrittsfigur und einer Austrittsfigur. Im andern Fall, bei einer theilweisen Ausschneidung, wie in Fig. 82, bildet sie dagegen nur eine zusammenhängende Figur.

**177.** Bei der Durchdringung, Fig. 81, gehören alle diejenigen Punkte zur Eintrittsfigur, die sich auf Hülfsebenen beziehen, deren Risse die Basis ABCDE von O über C und D bis W durchschneiden, während alle diejenigen Punkte zur Austrittsfigur gehören, die sich auf Hülfsebenen beziehen, deren Risse dieselbe Basis von P über A bis X durchschneiden. Und in derselben Ordnung, wie diese Durchschnittspunkte im Umfang der Basis von O bis W und von P bis X aufeinander folgen, sind dieselben auch, von einem ersten Punkt (q, q'), resp. (r, r') an, nach beiden Seiten, je nachdem sie in Bezug auf die erste Kante (Hm, h'm') von rechts- oder linksliegenden Kanten oder Hülfslinien herrühren, zu verbinden.

Bei der theilweisen Ausschneidung, Fig. 82, gilt in Beziehung auf die Verbindung der Durchschnittspunkte dasselbe, nur muß man, von einem ersten Eintrittspunkt (q, q'), der sich auf den äußersten Riß NH und die Erzeugenden (Hm, h'm') und (Of, o'f') bezieht, angefangen, die gleiche Ordnung bis zum andern Austrittspunkt (r, r') derselben Erzeugenden (Hm, h'm'), deren Riß die Basis ABCDE anderseits in P schneidet, fortsetzen.

**178.** Was das Ausziehen und Punktiren der sichtbaren und unsichtbaren Theile der Durchschnittsfigur betrifft, so hat man nur darauf zu sehen, ob die betreffenden Punkte der Figur selbst sichtbar oder unsichtbar sind. Ein Punkt der Durchschnittsfigur ist aber immer sichtbar, wenn die beiden Geraden (Kante oder Erzeugende und zugehörige Schnittlinie), worauf er liegt, selbst sichtbar sind; ein Punkt derselben ist aber unsichtbar, wenn eine oder beide Geraden, die ihn bestimmen, selbst unsichtbar sind. Ob aber eine Kante oder Erzeugende sichtbar oder unsichtbar sei, erkennt man daran, ob ihr Fußpunkt bezüglich des Grund- und Aufrisses auf dem sichtbaren oder unsichtbaren Bogen der Basen liege, wie schon in den „Elementen" (II. 1, §. 139—140) erklärt worden ist.

**179.** Alle die Erklärungen, die wir im Vorigen (§. 174—178) an den Fig. 81 und 82 erläutert

haben, gelten auch für die folgenden verwandten Aufgaben in Fig. 83 und Fig. 84, sowie in Fig. 85 und Fig. 86, die wir sogleich näher kennen lernen wollen.

**180.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittsfigur zweier Prismen oder zweier Zylinder zu finden, wenn ihre Projektionen gegeben sind, Fig. 83 und Fig. 84.

Auflösung. Es seien A B C D E f g h i k, a′ b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ k′ die Projektionen des einen und L M N O P q r s t u, l′ m′ n′ o′ p′ q′ r′ s′ t′ u′ die des andern Prisma's, Fig. 83. Um nun zuerst die Projektionen der Durchschnittsfigur beider Prismen zu finden, nehme einen beliebigen Punkt (v, v′) an und ziehe durch ihn eine Parallele (v W, v′ w′) zu den Kanten des ersten und eine Parallele (v X, v′ x′) zu den Kanten des andern Prisma's. Durch diese beiden Geraden lege nun (nach §. 15) eine Hülfsebene, so werden die Ebenen des Systems, welche (nach §. 164) sich zur Auffindung der Durchschnittspunkte hier am besten eignen, mit ihr parallel sein. Da (nach §. 33) parallele Ebenen auch parallele Risse haben, so hat man nur mit W X, dem Horizontalriß der Hülfsebene, durch die Eckpunkte der beiden Grundflächen Parallelen als Risse der durchgelegten parallelen Ebenen zu ziehen und fortzufahren, wie in der vorigen Aufgabe erklärt worden ist.

Hiernach bemerkt man sofort, daß beide Prismen sich nur theilweise ausschneiden. Denn von den beiden äußersten Rissen der Basis A B C D E schneidet der eine, durch B gehende, die Basis L M N O P in zwei Punkten, während der andere, durch E gehende, dieselbe nicht mehr schneidet, worin eben (nach §. 176) das Kennzeichen für die theilweise Ausschneidung besteht.

Die einzelnen Punkte der Durchschnittsfigur (1 2 3 4 5 . . . 16, 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ . . . 16′) werden auf gleiche Weise, wie in der vorigen Aufgabe, gefunden. Will man z. B. die Durchschnittspunkte (1, 1′) und (10, 10′) der Kante (B g, b′ g′) des ersten Prisma's mit den entsprechenden Flächen des zweiten Prisma's finden, so ziehe durch B mit W X den parallelen Riß B Z, welcher die Basis des letztern Prisma's in den beiden Punkten Y und Z durchschneidet, projicire Y und Z nach y′ und z′, und lege durch (Y, y′) und (Z, z′) nach §. 13 mit L q Parallelen, welche die Kante (B g, b′ g′) in den verlangten Punkten (1, 1′) und (10, 10′) durchschneiden u. s. f.

**181.** Ganz ebenso verfährt man auch, wenn die sich durchschneidenden Körper, wie in Fig. 84, Zylinder sind. A B C D E F g h i k l m, a′ b′ c′ d′ e′ f′ . . . m′ seien die Projektionen des einen und N O P Q r s t u, n′ o′ p′ q′ r′ s′ t′ u′ die Projektionen des andern Zylinders. Nehme wieder den beliebigen Punkt (v, v′) an und lege durch ihn die Parallelen (v W, v′ w′) und (v X, v′ x′) mit den Erzeugenden der beiden Zylinder, lege durch diese Parallelen eine Hülfsebene und

bestimme (nach §. 15) ihren Horizontalriß W X. Damit ziehe durch die einzelnen Punkte beider Basen der Zylinder parallele Geraden, so sind dieß die H-Risse der entsprechenden Hülfsebenen.

Da, wie man sieht, die beiden äußersten Risse an die Basis A B C D E F des ersten Zylinders die Basis N O P Q des zweiten Zylinders ganz einhüllen, ohne sie zu schneiden oder auch nur zu berühren, so hat man es hier (nach §. 176) mit einer vollkommenen Durchdringung zu thun. Die Durchschnittskurve, deren einzelne Punkte genau so wie im Vorigen gefunden werden, besteht demnach aus zwei getrennten Theilen, nämlich aus einer Eintrittskurve (1 2 3 4 5 . . ., 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ . . .) und einer Austrittskurve (I II III IV V . . ., I′ II′ III′ IV′ V′ . . .).

**182.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittsfigur einer Pyramide mit einem Prisma oder eines Kegels mit einem Zylinder zu finden, wenn ihre Projektionen gegeben, Fig. 85 und 86.

Auflösung. Sind die beiden Körper ein Prisma und eine Pyramide, wie in Fig. 85, so seien A B C D E f, a′ b′ c′ d′ e′ f′ die Projektion der letztern und G H J K L m n o p q, g′ h′ i′ k′ l′ m′ n′ o′ p′ q′ die des erstern.

Die Projektionen der Durchschnittspunkte beider Körper zu finden, wende man (nach §. 164) ein System von Hülfsebenen an, die durch die Spitze der Pyramide gehen und zugleich parallel mit den Kanten des Prisma's sind.

Zieht man also durch (f, f′) mit (G m, g′ m′) die Parallele (f R, f′ r′), so wird dieß die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der genannten Hülfsebenen sein, und sucht man ihre Horizontalspur R, so werden die Horizontalrisse derselben durch diesen Punkt und je einen Eckpunkt der beiden Basen gehen.

Aus der relativen Lage dieser Risse erkennt man (nach §. 176) wieder sofort die Art des Durchschnitts beider Körper. Da nämlich die äußersten Risse R J und R L der Basis G H J K L des Prisma's die Basis A B C D E der Pyramide ganz einhüllen und nicht schneiden, so hat man es hier mit einer gänzlichen Durchdringung zu thun, und die Durchschnittsfigur besteht wieder aus zwei getrennten Theilen, aus der Eintrittsfigur (1 2 3 4 5 6 7 8 9, 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ 7′ 8′ 9′) und der Austrittsfigur (I II III IV V VI VII, I′ II′ III′ IV′ V′ VI′ VII′), deren einzelne Punkte wiederum ganz wie in den vorigen Figuren gefunden werden.

**183.** Sind die beiden sich durchschneidenden Körper ein Kegel und ein Zylinder, wie in Fig. 86, so bleibt sich das Verfahren der Auflösung gleich wie im vorigen §.

Sind demnach A B C D E f, a′ b′ c′ d′ e′ f′ die Projektionen des Kegels und G H J K L p q r s t, g′ h′ i′ k′ l′ p′ q′ r′ s′ t′ die des Zylinders, so ziehe

durch (f, f'), der Spitze des Kegels, eine Parallele (fU, f'u') mit den Erzeugenden (Gp, g'p') des Zylinders, und durch ihre Horizontalspur U und die einzelnen Punkte beider Basen beliebige Geraden, welches alsdann die Horizontalrisse der entsprechenden Hülfsebenen sind. Wie man sieht, so hüllen die äußersten Risse UN und UO an die Basis des Zylinders jene des Kegels ein. Also leitet die Annahme wieder auf eine vollkommene Durchdringung, und die Durchschnittskurve besteht aus den beiden getrennten Aesten (123456, 1'2'3'4'5'6') und (I II III IV V VI, I'II'III'IV'V'IV'), deren einzelne Punkte wie in den vorigen Aufgaben gefunden werden.

Die besondern Punkte, d. h. diejenigen, welche sowohl in der H. E. als in der V. E. auf der Erzeugenden des Umrisses liegen, sind auch hier besonders in's Auge zu fassen und zu konstruiren. Die Umrißlinie Bf liefert auf diese Weise die Punkte 6 und VI, jene Xs ebenso die Punkte 2 und 5 u. s. w.

### b. Durchschnittskonstruktionen der Umdrehungskörper unter sich.

**184.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittsfigur zweier Umdrehungsflächen zu bestimmen, deren Achsen parallel sind, Fig. 87.

Auflösung. Nimmt man zur Einfachheit die Drehachsen zur H. E. senkrecht an, so kann man (nach §. 165) zur Konstruktion der Durchschnittslinie ein System von Hülfsebenen anwenden, die zu den Drehachsen senkrecht, also zur H. E. parallel sind. Jede dieser Hülfsebenen schneidet alsdann jede der gegebenen Umdrehungsflächen in Kreisen, die sich vertikal als Gerade, parallel der Achse, und horizontal als Kreise in wahrer Größe projiciren. Die Punkte, worin sich hierauf diese Kreise durchschneiden, sind Punkte der gesuchten Durchschnittsfigur.

Es seien daher, Fig. 87, abcd, a'b'c'd' und aecf, a'e'c'f' die Projektionen des zur V. E. parallelen Meridians und des zur H. E. parallelen größten Kreises oder Aequators der einen und ghik, g'h'i'k' und glim, g'l'i'm' die derselben Umrißlinien der andern Umdrehungsfläche. Die erstere wurde hier, wie man sieht, als Kugel, die andere als kreisrundes Ellipsoid angenommen.

Um nun einzelne Punkte der Durchschnittskurve zu erhalten, schneide beide gegebenen Flächen, wie gesagt, durch Hülfsebenen senkrecht zu den Drehachsen. Ist p'r' der V-Riß einer solchen Hülfsebene, so schneidet diese die Kugel in einem Kreise vom Radius n'p' und das Ellipsoid in einem Kreise vom Radius q'r'. Diese beiden Kreise schneiden sich horizontal in den beiden Punkten s und t, die sich ihrerseits vertikal nach s' und t' projiciren; (s, s') und (t, t') sind alsdann zwei Punkte der verlangten Durchschnittskurve. Ebenso findet man beliebig viele andere Punkte.

**185.** Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen

auch hier die auf den Umrissen liegenden besondern oder merkwürdigen Punkte. Deßhalb dieselben noch extra gesucht werden sollen.

Die beiden auf dem horizontalen Umriß a e c f der Kugel liegenden Punkte zu erhalten, denkt man sich beide Umdrehungsflächen durch eine horizontale Hülfsebene durch den Mittelpunkt der Kugel geschnitten. Diese Ebene schneidet die Kugel in dem größten Parallelkreis (a e c f, a′ e′ c′ f′) und das Ellipsoid in einem Parallelkreis vom Radius u′ v′, welcher den erstern in den verlangten Punkten (w, w′) und (x, x′) durchschneidet.

Will man dagegen die auf dem horizontalen Umriß g l i m des Ellipsoids liegenden Punkte, so schneide man beide Umdrehungsflächen durch eine horizontale Hülfsebene durch den Mittelpunkt des Ellipsoides. Diese schneidet das Ellipsoid in dem größten Parallelkreis (g l i m, g′ l′ i′ m′) und die Kugel in einem Parallelkreis vom Radius y′ z′. Diese Kreise schneiden sich dann in den verlangten Punkten (a, a′) und (b, b′).

Ebenso leicht findet man die beiden auf dem vertikalen Umriß a′ b′ c′ d′ des Ellipsoides liegenden Punkte. Dazu schneide man beide gegebenen Flächen durch eine vertikale Hülfsebene, die durch die Drehachse des Ellipsoides geht und parallel zur V. E. ist. Diese schneidet das Ellipsoid in dem Hauptmeridian (g h i k, g′ h′ i′ k′) und die Kugel in einem zur V. E. parallelen Kreis vom Radius c d, welcher den erstern in den verlangten Punkten (e, e′) und (f, f′) schneidet.

Um endlich die Punkte auf dem vertikalen Umriß g′ h′ i′ k′ der Kugel zu finden, denke man sich durch den Mittelpunkt derselben eine vertikale Hülfsebene gelegt, die zur V. E. parallel ist und die Kugel in dem Kreis (a b c d, a′ b′ c′ d′) und das Ellipsoid in einer Ellipse (f i, f′ h′ i′ g′) schneidet, die man wie folgt bestimmt. Die H-Projektion i f gibt sofort die Größe der kleinen Achse an, und die große Achse findet man, wenn man die Schnittebene um einen rechten Winkel dreht, so daß g nach $g_1$ zu liegen kömmt. In dieser Lage schneidet sie vertikal die Länge $g_1$′ $h_1$′ der großen Achse ab, welche nach g′ h′ in die ursprüngliche Lage zurückgebracht wird. Mit beiden Achsen f′ i′ und g′ h′ ist die Ellipse g′ i′ h′ f′ völlig bestimmt und kann nach Früherm (I. §. 132 oder 134) konstruirt werden. Die Punkte (l, l′) und (m, m′), wo sie den vertikalen Umriß a′ b′ c′ d′ der Kugel durchschneidet, sind alsdann die verlangten.

**186.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittskurve zweier Umdrehungsflächen, z. B. eines Ellipsoides und eines Paraboloides zu bestimmen, deren Achsen sich in einem Punkte durchschneiden, Fig. 88.

Auflösung. Der Einfachheit wegen werde die eine Achse senkrecht zur H. E. und beide Achsen parallel zur V. E. angenommen. Bei dieser Annahme können dann die Umrisse der erstern Drehungsfläche, wie bisher, durch den größten Parallelkreis (a e c f, a′ c′) und den zur V. E. parallelen Meridian (a c,

a′ b′ c′ d′) gezeichnet werden. Auch der vertikale Umriß der andern Drehungsfläche stellt sich als der zur V. E. parallele Meridian (g i, i′ n′ p′ h′ g′ m′ q′ l′) in wahrer Größe dar. Der horizontale Umriß dieser Fläche, der nicht mehr mit einem Parallelkreis zusammenfällt, muß dagegen erst gesucht werden, was aber folgendermaßen geschehen kann.

Man denke sich das Paraboloid durch Ebenen, senkrecht zur Drehachse h′ k′, geschnitten. Diese Schnitte sind Kreise vom Radius k′ i′, z′ a′, ..., welche sich horizontal als Ellipsen $l\,k_1\,i\,k_2$, $b\,z_1\,a\,z_2$, ... projiciren und den horizontalen Umriß des Paraboloids bestimmen, indem man an dieselben nur eine stetige Berührungslinie $k_1\,s_1\,g\,s_2\,k_2$ aus freier Hand zu ziehen hat.

Damit ist zugleich die Methode angegeben, wie man überhaupt den Umriß solcher Umdrehungsflächen bestimmt, deren Achse zur Projektionsebene geneigt ist. Dabei ist $k\,k_1 = k\,k_2 = k'\,k'' = k'\,i'$; $v\,v_1 = v\,v_2 = v'\,v''$ u. s. f., sowie $z\,z_1 = z\,z_2 = k'\,z''$; $x\,x_1 = x\,x_2 = x_1''\,x_2''$ u. s. f. Auf die gleiche Weise wurde in der folgenden Aufgabe der horizontale Umriß n l p m des zur H. E. geneigten Ellipsoides, dessen Drehachse (h k, h′ k′) ist, aufgefunden.

**187.** Was nun im Weitern die Konstruktion der Durchschnittskurve betrifft, so eignet sich hiezu, wie schon oben (§. 166) angedeutet worden ist, am besten ein System von concentrischen Kugelflächen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt der beiden Achsen zusammenfällt. Denn diese Kugelflächen schneiden beide Umdrehungsflächen in Kreisen, und die Punkte, worin sich je zwei solche zusammengehörige Kreise schneiden, sind alsdann Punkte der gesuchten Durchschnittskurve.

Aus o′, dem Schnitt der Vertikalprojektionen beider Drehachsen, beschreibe man daher mit beliebigem Radius Kreise, so können diese als die Vertikalprojektionen der gedachten Hülfskugeln betrachtet werden. Eine solche Hülfskugel sei z. B. a′ m′ c′ n′. Dieselbe schneidet das Ellipsoid in einem Kreis, der sich vertikal als Gerade a′ c′ und horizontal als Kreis a e c f, und das Paraboloid in einem Kreis, welcher sich vertikal als Gerade m′ n′ und horizontal als Ellipse darstellt. Letztere kann auch weggelassen werden, da man sie zur Konstruktion der Durchschnittspunkte nicht gerade nöthig hat. Diese beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten, deren gemeinschaftliche Vertikalprojektion r′ ist. Bringt man r′ horizontal nach $r_1$ und $r_2$ auf den zugehörigen Parallelkreis a e c f, so sind dieß die horizontalen Projektionen dieser beiden Punkte. Ebenso findet man beliebig viele andere Punkte der Durchschnittspunkte.

Die Punkte $r_1$ und $r_2$ sind zugleich diejenigen Punkte der Durchschnittskurve, die auf dem horizontalen Umriß des Ellipsoides liegen. Will man auch noch die besondern Punkte bestimmen, die auf dem horizontalen Umriß des Paraboloids sich befinden, so hat man nur ihre gemeinschaftliche V-Projektion s′ ho-

rizontal nach $s_1$ und $s_2$ auf den zugehörigen Parallelkreis ($t'u'$, $t_1 s_1 u s_2$) zu projiciren oder auch nur die H=Projektion des letztern zu zeichnen, welche alsdann den horizontalen Umriß $k_1 g k_2$ des Paraboloids in den beiden gesuchten Punkten $s_1$ und $s_2$ durchschneiden wird.

Die Punkte $p'$ und $q'$ auf den V=Umrissen der gegebenen Drehungsflächen sind im vorliegenden Fall die Durchschnittspunkte dieser Umrisse selbst und müssen daher nicht erst besonders konstruirt werden. Ihre Horizontalprojektionen p und q sind aus der V. E. bloß auf die Gerade a c in der H. E. zu projiciren.

**188.** Aufgabe. Die Projektionen der Durchschnittskurve zweier Umdrehungsflächen, z. B. eines länglichen und eines abgeplatteten Ellipsoides, zu bestimmen, deren Projektionen gegeben, wenn deren Achsen in verschiedenen Ebenen liegen, sich also weder schneiden, noch parallel sind, Fig. 89.

Auflösung. Zur Vereinfachung nehme, wie schon oben (§. 167) bemerkt worden ist, die Drehachse des einen Körpers, z. B. des länglichen Ellipsoids senkrecht zur H. E., und die des andern, also des abgeplatteten Ellipsoids, wie die erste, parallel zur V. E. an und zeichne die Umrisse (a e c f, a' b' c' d') und (n l p m, g' h' i' k') beider Flächen, wie in der vorigen Aufgabe (§. 186) erklärt worden ist.

Da die Drehachsen in verschiedenen Ebenen liegen, ist es nicht mehr möglich, auf beiden Umdrehungsflächen Parallelkreise zu finden, die in derselben Ebene oder auf derselben Kugel lägen. Man schneidet daher, wie ebenfalls schon oben (§. 167) angegeben worden ist, beide Körper am besten durch horizontale Hülfsebenen, von denen jede das erste Ellipsoid in einem Kreis und das zweite in einer Ellipse schneidet, welche letztere punktweise gesucht werden muß. Dazu bedient man sich einer Reihe von Hülfsebenen, die zur Drehachse dieses zweiten Ellipsoides senkrecht sind und dieses daher in Parallelkreisen und die entsprechende horizontale Hülfsebene je in einer Geraden und den zugehörigen horizontalen Parallelkreis je in zwei Punkten durchschneiden, welche, gehörig miteinander verbunden, die fragliche Ellipse liefern.

Es sei darum $q' r'$, parallel der Projektionsachse, der V=Riß einer der horizontalen Hülfsebenen. Diese schneidet das erste oder längliche Ellipsoid in einem Kreis vom Durchmesser $q' r'$, der in der H. E. sofort gezeichnet werden kann, und das zweite oder abgeplattete Ellipsoid in einer Ellipse, deren V=Projektion die Gerade $s' t'$ ist, und deren H=Projektion, die sich in wahrer Größe darstellt, erst gefunden werden muß. Zu diesem Behufe denke man sich, wie gesagt, das zweite Ellipsoid durch eine Reihe von Hülfsebenen, senkrecht zur Drehachse ($h k$, $h' k'$), geschnitten. Eine solche Hülfsebene habe den V=Riß $u' v'$. Dieser schneidet den zugehörigen V=Riß $q' r'$ der horizontalen Hülfsebene in $w'$, der gemeinschaftlichen V=Projektion zweier Punkte, deren H=Projektionen zu suchen sind. Den

Kreis u′ v′ drehe man hiezu um die in w′ auf die V. E. senkrecht projicirte Gerade, bis er zur H. E. parallel ist und nach $u_1{}' v_1{}'$ zu liegen kommt. In dieser Lage kommt dessen Mittelpunkt x′ nach $(x_1{}', x_1)$. Beschreibt man daher aus $x_1$ mit dem Radius $x_1 u_1 = x_1{}' u_1{}' = x' u'$ einen Kreis $u_1 w_1 v w_2$, so schneidet dieser die projicirende Gerade des Punktes w′ in den Punkten $w_1$ und $w_2$, die nun der gesuchten Ellipse $s w_1 t w_2$ angehören.

Auf gleiche Weise bestimmt man beliebig viele andere Punkte derselben. Die Punkte y und z, worin sie den zugehörigen Kreis q y z r durchschneidet, sind dann endlich zwei Punkte der Horizontalprojektion der Durchschnittskurve beider Drehungsflächen. Projicirt man y und z vertikal nach y′ und z′ auf die entsprechende horizontale Hülfsebene q′r′, so sind dieß zwei Punkte der Vertikalprojektion der gesuchten Durchschnittskurve.

Indem man hierauf andere horizontale Hülfsebenen annimmt und die Konstruktionen der Schnittlinien wie vorhin wiederholt, erhält man beliebig viele Punkte der Projektionen der Durchschnittsfigur beider Drehungsflächen.

Die Konstruktion kann noch mehr vereinfacht werden, wenn man den Parallelkreis u′ v′ in der V. E. selbst u′ w″ v′ umlegt, die Senkrechte w′ w″ zu u′ v′ zieht und nach $w w_1 = w w_2$ abträgt, wodurch die Punkte $w_1$ und $w_2$ ebenfalls erhalten werden.

Endlich kann die fragliche Ellipse $s w_1 t w_2$ auch aus beiden Achsen erhalten werden, von denen die kleine Achse s t = s′ t′ unmittelbar gegeben und die große Achse gefunden wird, indem man (s t, s′ t′) in $(\alpha, \alpha')$ halbirt, durch $\alpha'$ zu h′ k′ die Senkrechte $\beta' \gamma'$ als Durchmesser des zugehörigen Parallelkreises zieht, diesen nach $\beta' \alpha'' \gamma'$ in die V. E. umlegt und die Senkrechte $\alpha' \alpha''$ zieht, welche nach $\alpha \alpha_1 = \alpha \alpha_2$ abgetragen, in $\alpha_1 \alpha_2$ die fragliche große Achse der Hülfsellipse und damit diese selbst bestimmt.

**189.** Wie in §. 168 angedeutet worden ist, läßt sich übrigens die Aufgabe auch noch mittelst vertikaler Hülfsebenen lösen, die mit den Hauptmeridianebenen beider Drehungsflächen, also auch mit der V. E. parallel sind. Denn jede derselben schneidet beide Oberflächen in Kurven, die mit den Hauptmeridianen ähnliche und ähnlichliegende Figuren, im vorliegenden Falle also Ellipsen sind und daher konstruirt werden können, wenn man einen Endpunkt ihrer Achsen oder conjugirten Durchmesser kennt.

Es sei daher $\delta \zeta$ der H-Riß einer zur V. E. parallelen und zur H. E. senkrechten Hülfsebene. Diese schneidet beide Ellipsoide in Ellipsen, die sich wie folgt bestimmen lassen. Man projicire $\delta \varepsilon$, den Schnitt mit a e c f, vertikal nach $\delta' \varepsilon'$, so ist dieß die kleine Achse des elliptischen Schnittes mit dem ersten oder länglichen Ellipsoid. Die große Achse findet sich wie oben (§. 185) oder auch mittelst der ähnlichen Dreiecke a′ d′ e′ und $\delta' \theta'$ e′. Indem man nämlich a′ d′

und damit durch $\delta'$ die Parallele $\delta' \theta'$ zieht, so ist $e' \theta'$ die halbe große Achse der gesuchten Ellipse.

Projicirt man ebenso $\zeta$ nach $\zeta'$ auf die vertikale Projektion $n' p'$ des horizontalen Umrisses $n l p m$ des zweiten oder abgeplatteten Ellipsoides, so ist $(\zeta, \zeta')$ ein Punkt des elliptischen Schnittes mit dem letztern Ellipsoid. Zieht man daher $\zeta' \eta' \parallel p' i'$ und $\eta' \lambda' \parallel i' h'$, so sind $l' \eta'$ und $l' \lambda'$ die Halbachsen der fraglichen Ellipse. Damit können nun die beiden Ellipsen gezeichnet werden. Die Punkte $(\mu, \mu')$ und $(\nu, \nu')$, wo sie sich durchschneiden, sind dann zwei Punkte der Durchschnittsfigur beider Ellipsoiden. Auf gleiche Weise findet man auch nach dieser Methode beliebig viele andere Punkte.

**190.** Will man endlich auch noch die besondern Punkte, d. h. die auf den Umrissen liegenden Punkte bestimmen, so ergeben sich dieselben ähnlich wie in den vorigen Aufgaben (§. 185 und 187).

Fassen wir zuerst die horizontalen Umrisse in's Auge, so kömmt, da der Parallelkreis $(a e c f, a' c')$ vom zweiten Ellipsoid nicht geschnitten wird, nur der Umriß $n l p m$ dieses letztern in Betracht. Die darauf liegenden Punkte $(\sigma, \sigma')$ und $(\tau, \tau')$ zu finden, denke man sich in $n' p'$ eine zur V. E. senkrechte Ebene gelegt. Diese schneidet alsdann das zweite Ellipsoid in einer Ellipse, deren H-Projektion der horizontale Umriß dieses Ellipsoides ist. Dieselbe schneidet aber zugleich das erste Ellipsoid in einer Ellipse, deren V-Projektion die Gerade $\xi' \varrho'$ ist und deren H-Projektion die Ellipse $\xi \varphi_1 \varrho \varphi_2$ ist, deren Achsen vor Allem zu suchen sind. Die eine Achse $\xi \varrho$ erhält man unmittelbar, indem man $\xi'$ und $\varrho'$ nach $\xi$ und $\varrho$ auf die zur Projektionsachse Parallelen $a c$ projicirt. Halbirt man sofort $(\xi \varrho, \xi' \varrho')$ in $(\varphi, \varphi')$ und legt durch den Halbirungspunkt einen Parallelkreis $\psi' \chi'$, der nach $\psi' \varphi'' \chi'$ in die V. E. umgelegt wird, so ist die Ordinate $\varphi' \varphi''$ gleich der zweiten Halbachse, die horizontal nach $\varphi \varphi_1 = \varphi \varphi_2$ zu tragen ist. Mit den Achsen $\xi \varrho$ und $\varphi_1 \varphi_2$ ist alsdann die Ellipse $\xi \varphi_1 \varrho \varphi_2$ bestimmt, welche den Umriß $n l p m$ in den Punkten $\sigma$ und $\tau$ schneidet. Projicirt man endlich $\sigma$ und $\tau$ nach $\sigma'$ und $\tau'$ auf die V-Projektion $n' p'$ des Umrisses, so sind $(\sigma, \sigma')$ und $(\tau, \tau')$ die verlangten Punkte.

Die auf den vertikalen Umrissen liegenden Punkte zu bestimmen, suche man die Schnittlinien der durch die Achsen $(b d, b' d')$ und $(h k, h' k')$ parallel zur V. E. gelegten Ebenen. Erstere schneidet das längliche Ellipsoid in der Ellipse $(a c, a' b' c' d')$ und das abgeplattete in einer Ellipse, deren V-Projektion $\pi' h' b'$, wie jene $\zeta' \lambda' \mu'$ gefunden wird. Diese beiden Ellipsen schneiden sich in den Punkten $(a, a')$ und $(b, b')$, den verlangten Punkten auf dem Umriß $a' b' c' d'$.

Die andere Hülfsebene schneidet das abgeplattete Ellipsoid in der Ellipse $g' h' i' k'$ und das längliche in einer Ellipse, deren V-Projektion $e' g' f'$, wie jene $\delta' \theta' \varepsilon'$ gefunden wird. Diese beiden Ellipsen schneiden

sich in (c, c′) und (d, d′), den verlangten Punkten auf dem Umriß g′h′i′k′.

Damit können wir diese Aufgabe als gelöst betrachten. Wir empfehlen aber dem Anfänger nachdrücklichst, dieselbe in einem möglichst großen Maßstab auszuführen, damit die Konstruktionsschwierigkeiten, die sie darbietet, um so leichter überwunden werden.

## V.

## Anwendungen der bisherigen Lehren auf Dachzerlegungen, Rohrentwickelungen, Gewölbekonstruktionen etc.

(Blatt 25—28, Fig. 90—125.)

**191.** Obgleich die bisherigen Lehren der darstellenden Geometrie ihre eigentliche praktische Anwendung erst in dem dritten Theil unserer „Anleitung", in den verschiedenen Zweigen des technischen Zeichnens, finden werden, so halten wir es gleichwohl am Platze, schon hier auf einige dieser Anwendungen, wie z. B. auf die Dachzerlegungen, die Rohrentwickelungen, die Gewölbekonstruktionen 2c., einzugehen.

### a. Dachzerlegungen 2c.

(Blatt 25—26, Fig. 90—100.)

**192.** Wenn ein Gebäude von gegebenem Grundriß zu bedachen ist, so handelt es sich hiebei vorzugsweise um die Bestimmung der richtigen Form und Größe, welche die einzelnen Dachflächen erhalten sollen, sowie um die Zerlegungen und Entwickelungen derselben.

Damit in Verbindung stehen diejenigen Arbeiten, welche bei den Zimmerleuten unter dem Namen „Schiften" bekannt sind und den Zweck haben, den einzelnen Holzstücken des Dachstuhls, den Balken, Sparren und Streben 2c., die richtige Form und Größe zu geben.

Von diesen beiden Aufgaben soll hier indessen vorzugsweise nur die erstere in Betreff der Dachzerlegungen in Betracht kommen.

**193.** Zur Lösung dieser Aufgabe müssen außer dem gegebenen Grundplan auch noch gewisse Bedingungen, welche die Dächer erfüllen sollen, bekannt sein. Als solche werden gewöhnlich zum Voraus festgestellt:

1) Daß die Dachflächen *ebene* Flächen seien;
1) daß sie mit dem Horizont die *gleiche Neigung* bilden, und
3) daß die oberste Dachlinie oder der First *horizontal* sein soll.

Im Folgenden werden wir diese Voraussetzungen, sofern es anders angeht, ebenfalls festhalten.

Was die erste Bedingung betrifft, so liegen drei Punkte stets in *einer* Ebene, während durch vier und mehr Punkte nur unter gewissen Umständen eine Ebene gelegt werden kann. Aus diesem Grunde kann daher eine *dreieckige* Dachfläche immer als Ebene ange-

nommen werden, eine vierseitige jedoch nur dann, wenn zwei gegenüberliegende Seiten derselben sich, gehörig verlängert, schneiden, oder parallel sind, weil nur zwei sich durchschneidende oder zwei parallele Gerade stets in einer Ebene liegen. Sind die beiden gegenüberliegenden Seiten einer viereckigen Dachfläche weder parallel noch sich schneidend, so können sie niemals in einer Ebene liegen und die Dachfläche erhält dann eine windschiefe Gestalt.

**194.** Die verschiedenen ebenen Dachflächen, welche gewöhnlich in der Anwendung vorkommen, werden abgetheilt in 1) Pultdächer, 2) Giebeldächer, 3) Walmdächer, 4) Mansardendächer und 5) Zeltdächer.

Das Pultdach, auch Halbdach genannt, besteht nur aus einer Dachfläche, die sich an eine vertikale Wand lehnt, wie dieß häufig für Nebengebäude der Fall ist.

Das Giebeldach oder Satteldach hingegen besteht aus zwei entgegengesetzt geneigten Dachflächen, die sich zu oberst in einer horizontalen Geraden, der Firstlinie oder dem Firsten, schneiden und auf beiden Seiten von gleichschenklig dreiseitigen vertikalen Mauerwänden, den Giebeln, begrenzt werden.

Das Giebeldach geht über in ein Walmdach, wenn dessen beide vertikale Giebelwände durch geneigte Dachflächen, die alsdann Walme genannt, ersetzt werden.

Wenn die Dachflächen aus je zwei ebenen Stücken zusammengesetzt sind, von denen das obere je eine kleinere Neigung als das untere hat, so entsteht ein gebrochenes Dach oder ein sog. Mansardendach, welches sowohl vom Pultdach, als vom Giebel- und Walmdach abgeleitet werden kann, seines unästhetischen Aussehens und seiner unvortheilhaften Konstruktion wegen aber nur selten angewendet wird.

Vereinigen sich bei einem Walmdach die Spitzen in einem Punkt, so daß alle Dachflächen die Gestalt von gleichschenkligen Dreiecken und das ganze Dach die Form von einer Pyramide erhält, so wird dasselbe ein Zeltdach genannt. Dasselbe eignet sich besonders zur Bedachung von quadratischen oder andern regulären Grundflächen, wie man dieß namentlich häufig bei Gartenhäuschen, Kirchthürmen 2c. trifft.

**195.** Die Durchschnittslinien der einzelnen Dachflächen heißen Gräte (Grate) oder Kehlen, je nachdem die entsprechenden Grundlinien, die Dachtrauflinien, einen erhabenen oder hohlen (einspringenden) Winkel mit einander bilden. Und die Punkte, in welchen sowohl die Kehlen als die Gräte den Firsten treffen, werden die Abfall- oder Anfallpunkte genannt.

Schneiden oder durchdringen sich bei einem zusammengesetzten Bau zwei oder mehrere Dachflächen, so

bilden sie in den Kehlen oder Gräten, wo dieß geschieht, eine **Wiederkehr**. Und entstehen hiebei Gräte, welche verschieden hohe Firste mit einander verbinden, so heißen sie noch insbesondere **Dachverfällungen**.

Unter der Voraussetzung, daß alle Dachflächen eben sind und dieselbe Neigung haben, projiciren sich sowohl die Kehlen als die Gräte als die Halbirungslinien der Winkel, welche die entsprechenden Dachtrauflinien mit einander bilden. Damit ist man im Stande, die Projektionen der Dachflächen selbst zu finden. Aus den Projektionen der Dachflächen und ihren horizontalen Neigungswinkeln, nebst der Höhe der Firstlinien, oder den entsprechenden vertikalen Querschnitten ergibt sich dann auch die Entwickelung und damit die richtige Form und Größe der einzelnen Dachflächen.

**197.** Wenn die Dachflächen nicht eben, sondern gekrümmt sind, so daß dieselben durch eine vertikale Querschnittsebene in krummen Linien geschnitten werden, so heißt das Dach bei einem eckigen Grundplan ein **Bohlendach** und bei einem kreisrunden Grundriß ein **Kuppeldach**. Letzteres hat deßhalb die Form einer Halbkugel oder irgend einer andern Rotationsfläche. Solche Dächer kommen besonders bei größern Kirchen ꝛc. in Anwendung. Wir beschränken uns jedoch darauf, im Folgenden einige der häufigern ebenen Dächer im Speziellen zu betrachten.

**198.** **Aufgabe.** Es ist der Grundriß eines Gebäudes in Form eines Rechtecks gegeben; man soll die verschiedenen Dachflächen unter der Voraussetzung bestimmen, daß das Gebäude einerseits mit einem Giebel und anderseits mit einem Walmen versehen sei, Fig. 90.

**Aufl.** Es sei ABCD der gegebene, mit der H. E. zusammenfallende Grundplan des Gebäudes und A e′ D die wahre Größe des einerseits angebrachten vertikalen Giebels. Da die Dachflächen die gleiche Neigung mit dem Horizont haben sollen, so halbire die Winkel bei B und C durch die Geraden Bf und Cf und ziehe die Mittellinie e f. ABfe und DCfe sind dann die H-Projektionen der beiden Seitendachflächen, und BfC die H-Projektion der Walmfläche. Die erstern sind nach $ABF_1E_1$ und $CDE_2F_2$ und die letztere nach $BCF_3$ in die H. E. umgelegt worden, um sie in wahrer Größe zu erhalten. Dazu hat man $AE_1 = Ae'$ und $DE_2 = De'$ gemacht, $E_1F_1 = E_2F_2 = ef$ und durch f die Gerade $F_1F_2 \perp ef$ gezogen und mit $BF_1 = CF_2$ Bogen beschrieben, die sich in $F_3$ durchschneiden.

Die wahre Größe der Sparrenlänge für die beiden Seitendachflächen ist durch die Geraden $Ae' = AE_1$ und $De' = DE_2$ und für die beiden Gräte des Walmens durch die Geraden $BF_1 = BF_3 = CF_3 = CF_2$ angegeben. Letztere ist noch besonders durch Umbrehung eines Grates (Bf, A e′) in eine zur V. E. parallele Lage ($f\beta$, $e'\beta'$) gefunden worden, indem sich derselbe in dieser Lage vertikal in wahrer Größe als die Gerade $e'\beta'$ projicirt.

Die beiden Mauerlatten oder Pfetten sind unmittelbar durch die Geraden A B und C D, der First durch die Gerade e f und die Querbalken durch die Gerade A D angegeben.

**199.** Denkt man sich in e f eine vertikale Wand aufgestellt und daran über A F f e ein Pultdach angelehnt, so ist A e e′ der dazu gehörige senkrechte Querschnitt und A F $F_1$ $E_1$ die wahre Größe des in die H. E. umgelegten Pultdaches.

**200.** Soll das Dach oben anstatt dem geradlinigen First e f eine Plattform g h i k erhalten, so geht der Giebel A e′ D über in das symmetrische Paralleltrapez A D k′ g′, der Walmen in das symmetrische Paralleltrapez B C $J_2$ $H_2$ und die Seitendachflächen in die rechtwinkligen Paralleltrapeze A B $H_1$ $G_1$ und C D $K_1$ $J_1$.

**201.** Aufgabe. Es ist der Grundriß eines Gebäudes in Form eines senkrechten Paralleltrapezes gegeben; man soll wiederum die verschiedenen Dachflächen unter der Voraussetzung bestimmen, daß das Gebäude einerseits (über der senkrechten Nichtparallelen) einen Giebel und anderseits einen Walmen erhalte, Fig. 91.

Aufl. Es sei A B C D der gegebene Grundriß des Gebäudes und A e′ D die wahre Größe des über A D angebrachten vertikalen Giebels. Halbire wieder die beiden Winkel B und C durch die Geraden B f und C f und ziehe die Mittellinie e f, so sind A B f e, C D e f und B C f die H-Projektionen der drei Dachflächen, die, in die H. E. umgelegt, nach A B $F_1$ $E_1$, D C $F_2$ $E_2$ und B C $F_3$ zu liegen kommen. Die beiden Seitendachflächen, wie die beiden Gräte des schiefen Walmens, sind hier ungleich. Ihre wahre Größe findet sich aber auf gleiche Weise wie im vorigen Fall. Indem man nämlich die Gräte (B f, A e′) und (C f, D e′) nach (f $\beta$, e′ $\beta'$) und (f $\gamma$, e′ $\gamma'$) in eine zur V. E. parallele Lage dreht, geben die V-Projektionen e′ $\beta'$ und e′ $\gamma'$ die wahre Größe derselben an.

**202.** Aufgabe. Es ist der Grundriß eines Gebäudes in Form eines beliebigen Paralleltrapezes gegeben; man soll dasselbe so bedachen, daß es auf Seite der Nichtparallelen vertikale Giebelwände erhalte, Fig. 92.

Aufl. Es sei A B C D der gegebene Grundriß des Gebäudes. Halbire die beiden Nichtparallelen A D und B C in e und f und ziehe e f, so ist dieß die H-Projektion der Firstlinie, deren Höhe, gleich der Höhe $e_1$′ e′ des zu e f senkrechten Querschnittes a′ D e′, als gegeben betrachtet wird.

Errichtet man hierauf in e und f die Senkrechten e $E_1$ und f $F_1$ zu A D und B C und macht dieselben gleich der Höhe $e_1$′ e′ und verbindet $E_1$ mit A und D und $F_1$ mit B und C, so sind die gleichschenkligen Dreiecke A D $E_1$ und B C $F_1$ die in die H. E. umgelegten senkrechten Giebelwände.

Denkt man sich ebenso die beiden Dachflächen in die H. E. umgelegt, so beschreiben die Punkte E und F

Kreisbogen, die sich horizontal als die zu e f gezogenen Senkrechten $E_2 E_3$ und $F_2 F_3$ projiciren. Macht man dann noch $A E_2 = A E_1$, $D E_3 = D E_1$, $B F_2 = B F_1$ und $C F_3 = C F_1$, so sind $A B F_2 E_2$ und $D C F_3 E_3$ die umgeklappten Dachflächen in wahrer Größe.

Die wahre Größe der schiefen Giebelseiten $A E_1 = D E_1$ und $B F_1 = C F_1$ hätte man auch durch Umdrehung in eine zur V. E. parallele Lage ($e\alpha$, $e'a'$) und ($f\gamma$, $e'\gamma'$) als die V-Projektionen $e'\alpha'$ und $e'\gamma'$ erhalten.

**203.** Hätte man im vorigen Fall statt der senkrechten Giebel zwei schiefe Walme verlangt, so hätte man nur die Winkel A, B, C, D zu halbiren und fortzufahren gehabt, wie dieß beim schiefen Walmen B f C der Fig. 91 gezeigt worden ist. Die vier Dachflächen würden dann ebenfalls den (in §. 193) aufgestellten Bedingungen entsprechen.

**204.** Aufgabe. Es ist der Grundriß eines Trapezes oder unregelmäßigen Vierecks gegeben; man soll dasselbe so bedachen, daß die Dachflächen ebene Flächen seien und das Gebäude beiderseits mit Walmen versehen werde, Fig. 93—95.

Aufl. Mit Rücksicht auf das in §. 193 Gesagte ist es unter der gemachten Voraussetzung, daß die Dachflächen ebene Flächen seien, im vorliegenden Fall nicht möglich, auch die beiden andern Bedingungen, daß die Dachflächen mit dem Horizont die gleiche Neigung haben und die Firstlinie horizontal sei, festzuhalten, sondern eine derselben, z. B. die letztere, muß aufgegeben werden. Denn wollte man die Firstlinie horizontal behalten, so könnte sie die beiden Trauflinien der viereckigen Dachflächen weder schneiden noch mit ihnen zugleich parallel sein, und es müßten folglich beide oder doch wenigstens eine dieser Dachflächen windschief werden.

Verzichtet man aber auf die horizontale Firstlinie, so kann den beiden andern Bedingungen wie folgt entsprochen werden.

Ist A B C D, Fig. 93, der gegebene Grundriß des Gebäudes, und verlängert man die Trauflinien B A und C D bis G und halbirt man den Winkel B G C, wie auch die Winkel bei A, B, C und D, so werden sich die Halbirungslinien, wie leicht zu beweisen, zu je dreien in den Punkten e und f durchschneiden und e f kann nun als H-Projektion der zum Horizont geneigten Firstlinie und e und f als die H-Projektionen der Abfallpunkte für die beiden Walme angenommen werden, welche mit den beiden andern Dachflächen, die, weil sie je durch die in G sich schneidenden Geraden A B und e f, resp. C D und e f gehen, ebenfalls ebene Flächen sind, die gleiche Neigung haben. Die H-Projektionen der Dachflächen sind also A B f e, C D e f, A D e und B C f und die Dachflächen selbst sind nach $A D E_0$, $B C F_0$, $A B F_1 E_1$ und $C D F_2 E_2$ in die H. E. umgelegt worden. Dabei beschreiben die Abfallpunkte Kreisbogen, die sich horizontal als die Geraden

$eE_0 \perp AD$, $fF_0 \perp BC$, $eE_1$ und $fF_1 \perp AB$ und $eE_2$ und $fF_2 \perp CD$ projiciren.

Die Höhen der Abfallpunkte E und F sind den Senkrechten eM und fN, eH und fK oder eJ und fL proportional. Wird darum die Höhe des einen, z. B. des Punktes E, angenommen, so ist damit auch die des andern bestimmt. Denkt man sich daher diese Höhen in die H. E. umgelegt und macht man z. B. $eE_4 \perp eH$ und gleich der Höhe des Punktes E und zieht $GE_4$ gehörig verlängert, bis sie die zu fK errichtete Senkrechte $fF_4$ in $F_4$ trifft, so ist $fF_4$ die entsprechende Höhe des Punktes F.

Damit ergeben sich nun auch die in die H. E. umgelegten Dachflächen und Sparrenlängen. Denn zieht man die Hypothenusen $ME_3$, $NF_3$, $HE_4$, $KF_4$, $JE_5$, und $LF_5$ und schlägt dieselben nach $ME_0$, $NF_0$, $HE_1$, $KF_1$, $JE_2$ und $LF_2$, und verbindet die erhaltenen Punkte mit A, B, C, D und unter sich, so sind die umgelegten Dachflächen, sowie die Dachgräte ihrer Form und Größe nach vollkommen bestimmt. Die wahre Größe der Sparrenlängen für die Walmengräte ist noch überdieß als Hypothenuse der in die H. E. umgelegten rechtwinkligen Dreiecke $AeE_6$, $DeE_7$, $BfF_6$ und $CfF_7$ bestimmt worden.

**205.** Da jedoch Dächer mit geneigten Firsten keinen günstigen Eindruck auf den Beschauer machen, so wird die im vorigen §. angegebene Konstruktion nur selten angewendet, und man zieht es vor, die Firstlinie horizontal anzunehmen und auf die Bedingung zu verzichten, daß alle Dachflächen Ebenen seien.

Sind darum die Höhen der beiden Abfallpunkte E und F, deren horizontale Projektionen e und f wieder durch Halbirung der Winkel A, B, C und D des gegebenen Grundrisses ABCD, Fig. 94, erhalten werden, einander gleich, so werden die beiden viereckigen Dachflächen windschief und die Walmengräte krummlinig und können dieselben auf folgende Weise bestimmt werden.

Ziehe von e und f auf die Trauflinien AB und CD die Senkrechten eH, fK, sowie eJ, fL, theile dieselben in eine gleiche Anzahl, z. B. in je drei, gleiche Theile und verbinde die entsprechenden Theilpunkte, wie p und r, o und q, s und u, t und v, durch gerade Linien; ebenso theile auch die Senkrechten eM und fN in ebenso viele, also hier je in drei, unter sich gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte w und x, y und z mit den zugehörigen Trauflinien AD und BC Parallelen, welche die erstern Geraden, gehörig verlängert, in den Punkten 1, 2, 3, 4, resp. I, II, III, IV durchschneiden. Verbindet man dann noch diese Punkte durch die stetigen Kurven e12A, e34D, fIIIB, fIIIIVC, so sind damit die H-Projektionen der Dachflächen und der krummlinigen Gräte gefunden.

Ihre Entwickelungen $ADE_1$, $BCF_1$, $AE_2F_2B$, $DE_3F_3C$ ergeben sich nun wie in der vorigen Figur.

Uebrigens sind auch hier die nöthigen Konstruktionen durch Hülfslinien angegeben.

Die Neigungswinkel der Dachflächen, wie ihre Breiten oder Sparrenlängen bei den Abfallpunkten E und F, sind in den in die H. E. umgelegten rechtwinkligen Dreiecken $M e E_4$, $H e E_5$, $J e E_6$ und $N f F_4$, $K f F_5$, $L f F_6$, deren Höhen $e E_4$, $e E_5$, $e E_6$ und $f F_4$, $f F_5$, $f F_6$ der Voraussetzung zufolge einander gleich sind, enthalten. Im Dreieck $M e E_4$ sind ebenso die Höhen und Breiten der Theilpunkte W und X, nämlich $w W_1$ und $x X_1$, $M W_1 = M w_1$, $M X_1 = M x_1$ angegeben. Und endlich ist in den Dreiecken $G 3 3_0$, $G_1 4 4_0$, worin $3 G$ und $4 G_1 \perp D C$ und $G 3_0 = G 3_2$, $G_1 4_0 = G_1 4_2$ die Höhe der Walmengräte noch besonders durch die Katheten $3 3_0$, $4 4_0$ angedeutet.

**206.** Die im letzten §. angegebene Konstruktion mit den beiden windschiefen Dachflächen und den vier krummlinigen Walmengräten ist indessen, da dieselben in der Praxis nicht nur schwierig auszuführen, sondern dem Dache auch ein unschönes Ansehen geben, ebenfalls nicht beliebt und darum auch nur selten angewendet. Dieselbe zu umgehen, kann man eine der beiden folgenden Methoden anwenden. Ist eine der Langseiten des Gebäudes einem Hofe zugekehrt oder sonst nicht besonders bemerklich, so können beide windschiefen Dachflächen auf eine reduzirt werden, die man dann auf diese Seite verlegt. Oder, wenn auch dieses nicht angeht, wendet man wieder lauter ebene Dachflächen mit einer Plattform statt der obern Firstlinie an. Diese beiden Verfahrungsarten sind in Fig. 95 dargestellt, die wir sogleich näher erklären wollen.

**207.** Angenommen A B C D sei wieder der gegebene Grundriß des Gebäudes und A B die vordere Dachtraufline, so halbire die Winkel bei A, B, C und D, ziehe durch e die Geraden $e f \parallel A B$ und $e g \parallel C D$ und verbinde f und g, so wird auch $f g \parallel B C$ sein, und das Dreieck e f g stellt die H=Projektion der Plattform dar, die hier statt der obersten Firstlinie angewendet wird, und ebenso sind A e D, B f g C, A e f B und C g e D die H=Projektionen und $A E_1 D$, $B F_1 G_1 C$, $A E_2 F_2 B$ und $C G_2 E_3 D$ die Entwickelungen der Dachflächen, welche, wie durch Hülfslinien angedeutet, gefunden werden.

**208.** Will man auch keine Plattform, so behält man, wie gesagt, E F als horizontale Firstlinie, sowie die vordere Dachfläche A E F B als ebene Fläche bei, und ersetzt die hintere Dachfläche C F E D durch eine windschiefe Fläche. Bei der Umlegung in die H. E. kommt dieselbe nach $C F_6 E_3 D$ zu liegen, und die Walmen, die nun doch nur einerseits krummlinige Gräte erhalten, nach $A E_1 D$ und $B F_1 C$. Auch diese Konstruktionen und Umlegungen sind in der Figur durch Hülfslinien angedeutet und brauchen wohl keine weitere Erklärung, da sie wie in den frühern Figuren gefunden werden.

**209.** Aufgabe. Es ist der Grundriß eines Gebäudes mit einer Wiederkehr in Form eines rechten Winkels von gleicher Breite gegeben; man soll das Gebäude so bedachen, daß dasselbe einerseits mit einem vertikalen Giebel und anderseits mit einem Walmen endigt und zugleich die in §. 193 festgestellten Bedingungen erfüllt werden, Fig. 96.

Auflösung. Die Bestimmungen der Projektionen und Entwickelungen der einzelnen Dachflächen ergeben sich in diesem Fall einfach wie folgt:

Ist ABCDEF der gegebene Grundriß, BE die Richtung der dabei vorkommenden Wiederkehr und Ag′F die richtige Form und Größe des gegebenen vertikalen Giebels, so halbire AF in g, ziehe BE (als Halbirungslinie der Winkel B und E), halbire ebenso die Winkel C und D und ziehe gh und hi, sowie die Halbirungslinien Ci und Di; dann sind gh und hi die H=Projektionen der unterm rechten Winkel bei h zusammenstoßenden horizontalen Firstlinien, Ci und Di die H=Projektionen der Walmgräte und Bh und Eh die H=Projektionen des Grates und der Kehle an der Wiederkehr des Daches. Damit sind auch die H=Projektionen ABhg, BCih, CDi, DEhi und EFgh der Dachflächen, sowie ihre Umlegungen AB$H_1G_1$, BC$J_1H_2$, CD$J_2$, DE$H_3J_3$ und EF$G_2H_4$ bestimmt, und können wie in den vorausgehenden Figuren gefunden werden. Die Konstruktionen sind übrigens auch hier durch Hülfslinien angegeben. Die Sparrenlänge für die Walmgräte, wie für die Kehle und den Grat der Wiederkehr ist noch besonders bei h′β′ als V=Projektion des in eine zur V. E. parallele Lage (hβ, h′β′) gedrehten Grates (Bh, Ah′) gesucht worden.

**210.** Aufgabe. Es ist der Grundriß eines aus zwei ungleichen, unter einem stumpfen Winkel zusammenstoßenden Flügeln bestehenden Gebäudes, sowie die vertikalen Querschnitte der beiden Flügel als ähnliche gleichschenklige Dreiecke gegeben; man soll dasselbe so bedachen, daß das Dach beiderseits mit Walmen abfällt und daß im Uebrigen den in §. 193 festgestellten Bedingungen entsprochen wird, Fig. 97.

Auflösung. Es sei ABCDEF der Grundriß des Gebäudes und Ag′F der vertikale Querschnitt der größern und $c_1'd_1'k_1'$, ∾ Ag′F der des kleinern Flügels. Halbire die Winkel bei A, B, C, D, E, F durch die Halbirungslinien Ag, Bh, Ck, Dk, Ei, Fg als H=Projektionen der Gräte und Kehle, und ziehe noch die Geraden gh und ik als H=Projektionen der horizontalen, aber ungleich hohen Firstlinien und die Gerade hi als H=Projektion der hier entstehenden Dachverfällung, wodurch die beiden horizontalen Firsten in einander übergehen. Damit sind dann sowohl die H=Projektionen ABhg, BCkih, CDk, DEik, EFghi und AFg als die Entwickelungen AB$H_1G_1$, BC$K_1J_1H_2$, CD$K_2$, DE$J_2K_3$ und EF$G_2H_3J_3$ bestimmt und können letztere wie in den vorausgehenden Figuren gefunden werden.

Die wahre Größe der Sparrenlänge für die Walmengräte A G und F G ist noch besonders bei $g'\alpha'$ und die der Sparrenlänge für die Walmengräte C K und D K bei $k_1'\gamma'$ auf bekannte Weise gesucht worden. Ebenso ist die wahre Größe des Grates B H noch extra als Hypothenuse $BH_4$ des in die H. E. umgelegten rechtwinkligen Dreieckes $BhH_4$, worin $hH_4 = g_1\,g'$, und die der Kehle E J als Hypothenuse $EJ_4$ des in die H. E. umgekehrten rechtwinkligen Dreiecks $EiJ_4$, worin $iJ_4 = k_1\,k_1'$ angegeben.

**211.** Den vorigen Aufgaben über Dachzerlegungen mögen hier noch einige aus dem Straßenbau und der Optik angereiht werden, deren Auflösungen sich ebenfalls auf die Projektionen der Geraden, Winkel und Ebenen im Raume stützen. Vorher merke man sich aber noch folgende Erklärungen.

Bei einem Straßendamm heißen die schiefen Seitenflächen die Böschungsflächen, die entsprechenden schiefen Seiten des Profils oder des vertikalen Querschnittes die Böschungen und ihre Horizontalprojektion die Anlage der Böschung. Den Neigungswinkel der Böschungsflächen mit der H. E. pflegt man durch das Verhältniß der Anlage zur Höhe oder durch die Cotangente des Neigungswinkels auszudrücken. Bei der nachfolgenden Aufgabe der Fig. 98 ist dieß Verhältniß wie 3 : 2 oder $1\frac{1}{2} : 1$, d. h. die Anlage verhält sich zur Höhe wie 3 : 2 oder $1\frac{1}{2} : 1$. Eine solche Böschung wird dann in der technischen Sprache eine anderthalbfüßige Böschung genannt. Verhielte sich die Anlage zur Höhe wie 1 : 1, so wäre dieß eine einfüßige Böschung u. s. f.

**212.** Aufgabe. Es ist die H=Projektion und das Profil eines Straßendammes, sowie die H=Projektion der Fahrbahn einer schiefen Auffahrt oder eines Steigweges zu demselben gegeben; man soll die beiden Böschungsflächen des letztern so bestimmen, daß sie dieselbe Böschung oder horizontale Neigung wie der Damm erhalten, Fig. 98.

Auflösung. Es sei das symmetrische Paralleltrapez A D g′ e′ das Profil oder der vertikale Querschnitt des fraglichen Dammes A B C D e f h g, dessen H=Projektion und J K l m die Fahrbahn der schiefen Auffahrt oder des schiefen Steigweges; A B f e und C D g h sind die Böschungsflächen und e f g h die Krone oder die obere Fläche des Dammes, und die Böschungsflächen Q J l und K R s m des Steigweges sollen gesucht werden.

Zu diesem Behufe hat man nur durch J l und K m Ebenen zu legen, welche mit der H. E. dieselben Winkel bilden, wie die Böschungsflächen des Dammes, nämlich $\measuredangle\, eAe' = \measuredangle\, gDg'$. Man beschreibe daher aus l und m mit einem Radius $eA = gD = ln$ Bogen, ziehe von J und K aus Tangenten J O und K P an dieselben, mache $ms \parallel KR$ und verbinde Q mit l und R mit s, so sind J Q l und K R s m die H=Projektionen der verlangten Böschungswände der schiefen Auffahrt zum Damm.

Die Böschungswände des Dammes und der Auffahrt schneiden sich in den Kehlen Ql und Rs und die Böschungsfläche KRsm schneidet die obere Krone des Dammes in ms, während lm die Schnittlinie der Auffahrt mit der Dammkrone darstellt.

In der Figur ist zugleich auch die V-Projektion g′i′k′m′ des Steigweges und die wahre Größe $g'i_1'$ seiner Längenkante (Jl, i′g′) durch Umdrehung der letztern in eine zur V. E. parallele Lage ($J_1$ l, $i_1'$ g′) gesucht worden.

**213.** Wenn ein Lichtstrahl auf irgend eine Fläche auffällt, so ist der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Perpendikel auf die reflektirende Fläche am Einfallspunkt macht, gleich dem Winkel, den dieses Perpendikel mit dem zurückgeworfenen Strahl bildet, oder kurz: der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel. Der einfallende Strahl, das Perpendikel und der reflektirte Strahl liegen in einer Ebene, der Reflexionsebene, die auf der spiegelnden Fläche senkrecht steht. Auf diesen Sätzen beruhen die Auflösungen folgender Aufgaben.

**214.** Aufgabe. Es ist ein leuchtender Punkt, eine reflektirende, spiegelnde Fläche und der Ort des Auges gegeben; man soll den Einfallspunkt, d. h. denjenigen Punkt bestimmen, von welchem der einfallende Strahl nach dem Auge reflektirt wird, Fig. 99.

Auflösung. Es sei a′ der Ort des Auges, b′ der leuchtende Punkt und HH die reflektirende Fläche, senkrecht zur Zeichnungsfläche gedacht, gegeben und c, der Einfallspunkt, zu suchen. Fälle $b'b_1 \perp$ HH, mache $bb_1 = bb'$ und ziehe $a'b_1$, so ist c der verlangte Einfallspunkt. Denn es ist offenbar $\measuredangle\ bcb' = bcb_1 = a'ca$. Die Wirkung der Reflexion ist demnach so, als wenn der Strahl ca′ vom Punkt $b_1$ herkäme, welcher ebenso weit unter der reflektirenden Fläche liegt, als b′ über derselben liegt.

**215.** Aufgabe. Es sind die Projektionen eines leuchtenden Punktes, sowie die Projektionen eines andern Punktes gegeben, in welchen das Licht des erstern eines dazwischen liegenden Hindernisses wegen nicht direkt gelangen kann, sondern mittelst zweier reflektirenden Spiegel nach diesem reflektirt werden soll; es ist die Stellung dieser beiden Spiegel zu suchen, wenn von jedem überdieß die Lage eines Punktes gegeben ist, Fig. 100.

Auflösung. Es seien (a, a′) die Projektionen des leuchtenden Punktes, (d, d′) die Projektionen des Punktes, in welchen das Licht des erstern reflektirt worden ist, und W der Gegenstand, welcher das Licht hindert, direkt von (a, a′) nach (d, d′) zu gelangen, überdieß seien (b, b′) die Projektionen eines Punktes des erstern und (c, c′) die eines Punktes des zweiten Spiegels. Der Weg, den der von (a, a′) ausgehende Lichtstrahl nehmen muß, um nach (d, d′) zu gelangen, ist also durch (abcd, a′b′c′d′) vorgeschrieben. Die

Aufgabe verlangt daher die Bestimmung der Lage beider Spiegelflächen, welche in (b, b') und (c, c') beziehungsweise auf den Reflexionsebenen (a b c, a' b' c') und (b c d, b' c' d') senkrecht stehen und je mit dem einfallenden und zurückgeworfenen Strahl gleiche Winkel bilden. Zur Vereinfachung ist die V. E. mit (b c, b' c') parallel angenommen worden.

Um die Lage der ersten Spiegelfläche festzusetzen, halbire den Winkel (a b c, a' b' c') und stelle auf die Halbirungslinie (b f, b' f') eine senkrechte Ebene, so ist dies die verlangte.

Dazu nehme auf (a b, a' b') einen beliebigen Punkt (e, e') und suche vom Stück (b e, b' e') durch Umdrehung in eine zur V. E. parallele Lage die wahre Größe $b' e_1'$. Indem man hierauf $b' g' = b' e_1'$ macht und g' nach g auf b c projicirt und über b e und b g, sowie über b' e' und b' g' die Parallelogramme e b g f, e' b' g' f' beschreibt und ihre Diagonalen b f, b' f' zieht, so sind dies die Projektionen der den Winkel (a b c, a' b' c') halbirenden Geraden. Ebenso findet man die Projektionen (c n, c' n') der den Winkel (b c d, b' c' d') halbirenden Geraden.

Auf (b f, b' f') muß nun die erste und auf (c n, c' n') die zweite Spiegelfläche senkrecht stehen. Zieht man daher k l ⊥ b f und k' l' ∥ X X und ebenso i' h' ⊥ b' f' und i h ∥ X X, sowie r s ⊥ c n und r' s' ∥ X X, p' q' ⊥ c' n' und p q ∥ X X, so sind nach §. 32 (k l, k' l') und (i h, i' h') die Projektionen der durch (b, b') gehenden Hauptlinien der auf (b f, b' f') senkrecht stehenden Spiegelfläche und (r s, r' s') und (p q, p' q') die Projektionen der durch (c, c') gehenden Hauptlinien der auf (c n, c' n') senkrecht stehenden Spiegelfläche. Mittelst dieser Hauptlinien sind die Spiegelebenen geradlinig durch die Parallelogramme (k l i h, k' l' i' h') und (r s p q, r' s' p' q') begrenzt worden. Endlich ist der Neigungswinkel $y x y_1 = \alpha$ und der Neigungswinkel $a z a_1 = \beta$ in die H. E. umgelegt worden, wobei $y y_1 = t' u'$ und $a a' = v' w'$ zu machen.

**216.** Wenn ein Lichtstrahl von einem Mittel in ein anderes Mittel übergeht, das nicht dieselbe Dichtigkeit wie das erstere besitzt, so wird derselbe gebrochen, d. h. in seiner geraden Richtung abgelenkt.

Denkt man sich daher in Fig. 99 H H als Trennungsfläche zwischen beiden durchsichtigen Mitteln, z. B. zwischen Luft und Wasser, oder zwischen Luft und Glas ꝛc., und ist b' c ein auf die spiegelnde Fläche H H schief auffallender Strahl, so geht dieser nicht in gerader Richtung von der Luft in das Wasser oder von der Luft in das Glas ꝛc. über, sondern er wird nach der Richtung c k' gebrochen, und zwar so, daß der Brechungswinkel $V' c k' = \gamma$ kleiner als der Einfallswinkel $b' c V' = \beta$ ist und der sinus des letztern zum sinus des erstern in einer ganz bestimmten Beziehung steht*).

*) Ihr Verhältniß $\frac{\sin.\ \beta}{\sin.\ \gamma} = n$ wird der Brechungscoefficient genannt.

Beim Uebergang des Lichtstrahls aus Luft in Wasser beträgt nämlich der sinus des Brechungswinkels stets $^3/_4$ vom sinus des Einfallswinkels, beim Uebergang von Luft in Glas hingegen $^2/_3$ 2c.

Ist also b′c, Fig. 99, ein Lichtstrahl, der in c auf eine Wasserfläche auffällt; so erhält man die Richtung ck′ des gebrochenen Strahls, wenn man mit einem beliebigen Radius cd′ einen Kreisbogen beschreibt, welcher den Einfallsstrahl b′c in d′ durchschneidet, hierauf d′e′ ⊥ cV′ zieht und diese Gerade in 4 gleiche Theile theilt, durch den dritten Theilpunkt eine Parallele mit cV′ zieht, welche den Bogen in f′ trifft, und f′ mit c verbindet und gegen k′ verlängert. ck ist alsdann der im Wasser gebrochene Lichtstrahl*).

### b. Rohrentwicklungen.

(Blatt 27, Fig. 101—119.)

**217.** Wenn ein Rohr oder irgend ein Gefäß, dessen Form durch die nöthigen Ansichten und Durchschnitte festgesetzt ist, aus Blech oder Karton angefertigt werden soll, so kommt es vor Allem darauf an, die einzelnen Flächen, woraus dasselbe zusammengesetzt ist, auf der Ebene des Bleches oder Kartons dergestalt aufzuzeichnen, daß sie, gehörig ausgeschnitten, zusammengebogen und an den getrennten Stellen wieder durch Löthen, Leimen oder Pappen untereinander verbunden, genau die verlangte Gestalt des betreffenden Gegenstandes abgeben.

**218.** Diese Arbeiten, welche beim Flaschner, Spengler oder Klempner, beim Buchbinder, Schneider u. s. w.

---

*) Fällt ein Lichtstrahl, wie V′c, Fig. 99, senkrecht zu HH auf, so geht er ungebrochen fort. In jedem andern Fall wird der einfallende Strahl theils gebrochen, theils reflektirt, oder, wie man sagt, polarisirt. Fällt der Strahl so ein, daß der gebrochene Strahl auf dem reflektirten senkrecht steht, so wird das Licht am vollständigsten polarisirt, d. h. so modifizirt, daß es unter Umständen, wenn nämlich der Strahl um seine eigene Fortpflanzungsrichtung als Achse herumgedreht wird, stärker und schwächer gebrochen und zurückgeworfen und selbst gar nicht reflektirt wird. Zur Bestimmung des Winkels, unter welchem diese Erscheinung bei verschiedenen Körpern am vollkommensten eintritt, findet man leicht, wenn $\alpha$ den Polarisationswinkel b′cb und $n = \frac{\sin.\ b'cV'}{\sin.\ k'cV'} = \frac{\sin.\ \beta}{\sin.\ \gamma}$ das Brechungsverhältniß bedeutet, die Relation: $\text{cotag.}\ \alpha = n$. Für Luft und Glas ist nach Obigem das Brechungsverhältniß $n = {}^3/_2$, also $\text{cotag.}\ \alpha = {}^3/_2$, folglich $\alpha = 33^0\ 42'$. Denkt man sich daher den Strahl b′c, Fig. 99, unter dem Winkel $\alpha = 33^0\ 42'$ auf den Glasspiegel HH einfallend und in a′ eine zweite Spiegelfläche so aufgestellt, daß sie mit ca′, dem reflektirten Strahl, wieder den Winkel $\alpha = 33^0\ 42'$ macht und zur Zeichnungsfläche senkrecht, also zur ersten Spiegelfläche parallel ist, so wird die Reflexion am stärksten wahrgenommen. Wird nun aber die zweite Spiegelfläche im Kreise herumgedreht, jedoch so, daß sie mit ca′ stets denselben Winkel von $33^0\ 42'$ bildet, so wird der zweitmals reflektirte Strahl immer schwächer und, wenn der Drehungswinkel $90^0$ beträgt, sogar ganz unsichtbar; von da an nimmt die Reflexion bis zu $180^0$, wo sie wieder vollständig ist, zu; nachher bis zu $270^0$, wo sie wieder ganz verschwindet, ab; und endlich von da an bis zu $360^0$ wieder zu, wo sie abermals vollständig ist. (Polarisationsapparate von Nörrenberg und Biot.)

unter dem Namen des Zuschneidens der Formen bekannt sind, gehören in das Bereich der darstellenden Geometrie und lassen sich ebenfalls nach den in den vorausgehenden Abschnitten angegebenen Regeln genau ausführen.

Freilich werden solche Arbeiten in der Praxis noch häufig auf ganz empirische Weise ausgeführt, wobei althergebrachte Erfahrungsregeln und Musterschablonen als Wegweiser dienen, in den meisten Fällen aber und besonders bei der Anfertigung von neuen Körperformen dem Arbeiter Nichts als das Probiren und Anpassen übrig bleibt.

Es ist aber Jedem, der sich in den Werkstätten. derartiger Handwerker und Künstler umgesehen hat, zur Genüge bekannt, wie bei diesem Verfahren das Material vor lauter Zuschneiden und Anprobiren nicht selten so zugerichtet und verschnitten wird, daß es zur Anfertigung des betreffenden Gegenstandes gar nicht mehr gebraucht werden kann, abgesehen davon, daß das Probiren in gewissen, schwierigen Fällen auch dem gewandtesten Praktiker nicht mehr ausreicht.

Es sind daher die Kenntnisse der darstellenden Geometrie, worauf jenes rationelle Verfahren, d. h. die genau mathematische Entwicklung und Anfertigung beruht, auch für die genannten Gewerbtreibenden und Künstler, wollen sie anders ihr Fach selbstständig und mit Erfolg betreiben, ein wahres Bedürfniß.

Im Folgenden haben wir nun, um dieß Verfahren deutlich zu machen, eine Anzahl der wichtigsten Beispiele solcher Entwickelungen zusammengestellt. Dieselben sollen sofort näher erklärt werden.

**219.** Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier zylindrischer Rohre von ungleichem Durchmesser, deren Achsen sich senkrecht schneiden, gegeben; man soll die Entwicklung dieser beiden Rohre bestimmen, Fig. 101 bis 103.

Auflösung. Die Figur 101 zeigt von beiden sich durchschneidenden Rohren den gegebenen Grund- und Aufriß, wobei zugleich die nöthigen Hülfslinien zur Aufsuchung ihrer Projektionen, ihrer Durchschnittslinie und ihrer Entwickelungen angedeutet sind.

Man denke sich den zur Hälfte in die H. E. und zur Hälfte in die V. E. umgelegten Querschnitt des kleinern Rohres in eine Anzahl, z. B. in 12, gleicher Theile, wie $a_1 b_1 = b_1 c_1 = c_1 d_1 = \ldots$, resp. $a_1' b_1' = b_1' c_1' = c_1' d_1' = \ldots$, getheilt und durch die Theilpunkte Parallelen, wie $b_1 2$, $c_1 3$, ..., resp. $b_1' 2'$, $c_1' 3'$, ..., mit der Achse gezogen und die Durchschnittspunkte 2, 3, ... aus der H. E. nach 2′, 3′, ... in die V. E. projicirt, welch' letztere Punkte, durch eine stetige Kurve mit einander verbunden, die V-Projektion 1′ 2′ 3′ ... der Durchschnittskurve beider Rohre liefern. Um die Entwicklung des kleinen Rohres zu finden, ziehe eine Gerade A A, Fig. 103, und trage darauf aus Figur 101 die Bogentheile $a_1 b_1 = b_1 c_1 = c_1 d_1 = \ldots$ nach $AB = BC = CD = \ldots$ ab, errichte in A, B, C, ... die Senkrechten

A I, B II, C III, ..., mache sie gleich den entsprechenden Erzeugenden a 1, b 2, c 3, ... des kleinen Zylinders und verbinde die erhaltenen Punkte durch eine stetige Kurve I II III ... I, so ist A I II III ... I A die verlangte Entwicklung des kleinen Rohres.

Die Entwicklung des großen Rohres wird wie beim senkrechten Kreiszylinder (II. 1, §. 160, Fig. 72—73) gefunden. Man zeichnet nämlich ein Rechteck O N $N_1$ $O_1$, Fig. 102, dessen Seite O $O_1$ gleich dem Umfang, also gleich $3^1/_7$ mal Durchmesser des Rohres und dessen andere Seite O N gleich der Höhe o′ n′ desselben ist.

Die vom kleinen Rohr im Mantel des großen Rohrs ausgeschnittene Oeffnung I IV VII X zu finden, ziehe in 12, der Mitte von O $O_1$, die Gerade R V ∥ O N, mache R S = r′ s′, R U = r′ u′, R P = r′ p′, R Q = r′ q′, ..., sowie T W = T Y gleich dem Bogen 1 2 = 1 12, W X = Y Z gleich dem Bogen 2 3 = 12 11 und X IV = Z X gleich dem Bogen 3 4 = 11 10 und ziehe durch die Punkte P, Q, T, ... Parallelen mit O $O_1$, und durch W, X, Y, Z Parallelen mit O N, so werden sich beide Systeme von Parallelen in den Punkten II, III, IV, ... durchschneiden, welche, gehörig mit einander verbunden, die verlangte Oeffnung, in welcher das große Rohr vom kleinen ausgeschnitten wird, abgeben.

**220.** Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier zylindrischer Rohre von ungleichem Durchmesser und sich schief schneidenden Achsen gegeben; man soll die Entwicklung ihrer Oberflächen finden, Fig. 104—106.

Auflösung. Auch hier sind die Konstruktionen durch Hülfslinien hinreichend angegeben.

Vom kleinen Rohr ist in Fig. 104 die Hälfte des senkrechten Querschnittes in die V. E. umgelegt und in 6 bis 12 gleiche Theile a′ $b_1$′, $b_1$′ $c_1$′, $c_1$′ $d_1$′, ... getheilt, sodann a′, b′, c′, d′, ... horizontal nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... projicirt, b′ $b_1$′ nach $\beta$ b = $\beta$ m, c′ $c_1$′ nach $\gamma$ c = $\gamma$ l ... abgeschlagen und die Punkte a, b, c, ... durch eine stetige Kurve mit einander verbunden. Zieht man hierauf die Projektionen der Erzeugenden (a 1, a′ 1′), (b 2, b′ 2′), (c 3, c′ 3′), ..., und projicirt die Punkte 1, 2, 3, aus der H. E. nach 1′, 2′, 3′, ... in die V. E., so sind damit auch die Projektionen der Durchschnittskurve (1 2 3 ..., 1′ 2′ 3′ ...) beider Rohre gefunden. Das ganze Netz des großen Rohres, Fig. 105, bestimme wie in der vorigen Aufgabe, Fig. 102. Alsdann ziehe 2′ p′, 3′ q′, 4′ t′, ... parallel zur Achse und trage r′ u′, r′ p′, r′ q′, ... aus Fig. 104 nach R U, R P, R Q, ... in Fig. 105, und ebenso 12, 2 3, 3 4 ... nach T 𝔄, 𝔄 𝔅, 𝔅 IV, ..., ziehe durch P, Q, T, ... Parallelen mit O O, und durch 𝔄, 𝔅, ... Parallelen mit O N, und verbinde die Punkte I, II, III, ..., worin sich die entsprechenden Parallelen beider Systeme durchschneiden, so erhält man auch die Oeffnung I IV VII X, nach welcher die große Röhre von der kleinern ausgeschnitten wird.

Die Entwicklung der kleinen Röhre zu finden, ziehe in Fig. 104 die Hülfslinie u'w' || a'g', sodann in Fig. 106 eine beliebige Gerade UU, trage darauf die einzelnen Theile $a'b_1'$, $b_1 c_1'$, $c_1'd_1'$,... nach UX, XY, YZ,... ab, mache die Senkrechten XII, YIII, ZIV,... gleich x'2', y'3', z'4' und verbinde die erhaltenen Punkte U, I, II, III,... durch eine stetige Kurve aus freier Hand. Das Stück UVIIU entspricht dann dem Rohrstück u'w's' und müßte nur noch um die Länge u'a' rückwärts verlängert werden, wollte man das Netz vollständig erhalten.

**221.** Aufgabe. Es sind die Projektionen zweier zylindrischer Rohre gegeben, deren Durchmesser ungleich und deren Achsen zu einander schief sind, ohne sich zu schneiden; man soll ihre Entwickelungen finden, Fig. 107—109.

Auflösung. Die Projektionen der beiden Rohre und ihrer Durchschnittslinie (12345..., 1'2'3'4'5'...), Fig. 107, finden sich genau wie in der vorigen Nummer, und auch die Entwickelungen ihrer Oberflächen finden sich auf gleiche Weise. Aus Platzmangel ist indessen vom großen Rohr nur ein Stück desselben mit dem Loch gezeichnet worden. Dazu ziehe eine Gerade OO und trage darauf von einem beliebigen Punkt 1 aus die Bogen 12, 23, 34,... aus Fig. 107 nach 12, 23, 34,... in Fig. 108 ab, sodann messe in Fig. 107 die Höhen $1_1 1'$, $2_1 2'$, $3_1 3'$,... und trage sie nach 1I, 2II, 3III,... in Fig. 108 ab. Verbindet man endlich die erhaltenen Punkte I, II, III,... durch eine stetige Kurve IIVVIIX aus freier Hand, so ist damit das Loch bestimmt, nach welchem das größere Rohr vom kleinern ausgeschnitten wird.

Das Netz des kleinen Rohrs zu finden, ziehe eine Gerade AA, Fig. 109, und trage darauf die Theile $a'b_1' = b_1'c_1' = c_1'd_1' = \ldots$ aus Fig. 107 nach AB, BC, CD,... in Fig. 109 ab, errichte in den Punkten A, B, C,... Senkrechte und mache sie gleich den Erzeugenden a'1', b'2', c'3',... und verbinde die erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie IIIIII...I, so wird dadurch und durch die Gerade AA und die beiden Senkrechten AI, AI das Netz des kleinen Rohrs begrenzt.

**222.** Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zylindrischen und eines konischen Rohres gegeben, welch' letzteres das erstere in schiefer Lage durchschneidet; man soll die Entwickelung ihrer Mantelflächen finden; Fig. 110—112.

Auflösung. Dieser Fall kommt bei Gefäßen sehr häufig vor, wo ein zylindrisches Gefäß mit einem konischen Ausgußrohr versehen ist. In Fig. 110 sind beide Rohre im Grund- und Aufriß dargestellt. Dabei aber sind die Projektionen der Durchschnittslinie (1234..., 1'2'3'4'...) erst noch zu suchen.

Zu diesem Behufe denke man sich durch u'w' eine Schnittebene senkrecht zur Kegelachse s'z' gelegt und

in eine zur V. E. parallele Lage umgelegt, den über $u'w'$ beschriebenen Halbkreis $u'z_1'w'$, der den halben umgelegten Querschnitt darstellt, in eine Anzahl, z. B. 6 bis 12, gleicher Theile $u'x_1'$, $x_1'y_1'$, $y_1'z_1'$,... getheilt, von den Theilpunkten $x_1'$, $y_1'$, $z_1'$,... auf $u'w'$ die Senkrechten $x_1'x'$, $y_1'y'$, $z_1'z'$,... gefällt und durch deren Fußpunkte $x'$, $y'$, $z'$,... und die Spitze $s'$ des Kegels die Geraden $s'x'$, $s'y'$, $s'z'$,... gezogen und gehörig verlängert, hierauf die Punkte $x'$, $y'$, $z'$,... horizontal nach x, y, z,... projicirt, $x x_1 = x x_2 = x'x_1'$, $y y_1 = y y_2 = y'y_1'$,... gemacht und die erhaltenen Punkte durch eine stetige Kurve $1 x_1 y_1 z_1 w z_2 1$, als H-Projektion des betreffenden Kegelquerschnitts, und zugleich mit der Spitze s durch Geraden, als H-Projektionen der entsprechenden Erzeugenden, verbunden.

Dasselbe geschieht auch mit der Endfläche (a b c d ..., a' b' c' d' ...) des abgestumpften Kegels, die ebenso zur Hälfte in eine zur V. E. parallele Lage $a'b_1'c_1'd_1'$... umgelegt worden ist.

Projicirt man nun die Punkte 1, 2, 3, 4,..., worin die H-Projektionen der Erzeugenden des Kegels den H-Umfang des Zylinders treffen, vertikal nach 1′, 2′, 3′, 4′,..., auf die zugehörigen V-Projektionen derselben Erzeugenden, so ist, wenn diese Punkte stetig verbunden werden, die Kurve 1′2′3′4′... die V-Projektion der gesuchten Durchschnittslinie (1 2 3 4 ..., 1′2′3′4′...) des abgestumpften Kegels mit dem Zylinder.

Denkt man sich endlich noch die Erzeugenden (s 2, s′2′), (s 3, s′3′),.... in eine zur V. E. parallele Lage (s 7, s′7′) gedreht, wobei die Punkte 2′, 3′, 4′,... nach 2″, 3″, 4″,.... auf s′7′ zu liegen kommen, so hat man Alles vorbereitet, um die Entwickelungen finden zu können.

Vom Zylindermantel ist indessen in Fig. 111 ebenfalls nur ein Stück mit dem Loch I II III IV VII X, jedoch ganz auf dieselbe Weise wie in Fig. 108, gezeichnet worden. Die Bogentheile 12, 23, 34,... aus Fig. 110 sind nach 12, 23, 34,... auf eine Gerade in Fig. 111 und die zugehörigen Höhen aus Fig. 110 (von der P-Achse r′ o′ an gemessen) nach 1 I, 2 II, 3 III,... abgetragen und die erhaltenen Punkte I, II, III,... durch eine stetige Kurve I IV VII X verbunden worden.

Um das Netz des konischen Ausgußrohres zu erhalten, beschreibe mit s′a′ und s′u′ aus S, Fig. 112, Kreisbogen, und trage auf letzteren die Theile UX = $u'x_1'$, XY = $x_1'y_1'$, YZ = $y_1'z_1'$,... ab, so daß der Bogen UXY...U gleich dem Umfang des Schnittkreises u′ w′ (Fig. 110) wird; sodann ziehe von der Spitze S aus, Fig. 112, durch die Punkte X, Y, Z,... Gerade und mache S II = s′2″, S III = s′3″,... und verbinde die erhaltenen Punkte I, II, III,... durch eine stetige Kurve, so ist das Netz A U IV VII U A des konischen Ausgußrohrs gefunden.

**223.** Aufgabe. Zwei zylindrische Rohre von

gleichem Durchmesser sind unterm rechten Winkel miteinander zu verbinden; man soll die Linie finden, nach welcher die abgewickelten Oberflächen beider Rohre auszuschneiden sind, Fig. 113—114.

Auflösung. In Fig. 113 ist eine Ansicht beider Rohre mit einem zur Hälfte umgelegten Querschnitt gegeben. Theile letztern in eine Anzahl gleicher Theile $a b_1 = b_1 c_1 = c_1 d_1 = \ldots$ und ziehe durch dieselben mit der Seite a n Parallelen; hierauf denke man sich das Rohr a n o g nach $n r \perp n a$ geschnitten und in Fig. 114 eine Gerade O O gezogen und darauf die Bogentheile $a b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1, \ldots$ nach $N X_1 = N X_2 = X_1 Y_1 = X_2 Y_2 \ldots$ abgetragen, in den Punkten $X_1$, $X_2$, $Y_1$, $Y_2, \ldots$ Senkrechte errichtet und gleich x 2, y 3, z 4, … (in Fig. 113) gemacht und die Punkte I, II, III, … miteinander verbunden.

Soll das Netz vom Rohr a n o g vollständig gezeichnet werden, so hat man an O O abwärts ein Rechteck anzufügen von der Höhe = a n. Das andere Rohr ist dem erstern in Bezug auf die Schnittlinie VIII VII gleich und die Länge n q richtet sich in jedem Fall nach dem besondern Bedürfniß.

**224.** Bilden die beiden Rohre einen spitzen oder stumpfen Winkel miteinander (Fig. 115), so findet sich die entwickelte Oberfläche wie im vorigen Fall. Man ziehe wieder $n r \perp o p$ und entwickele den entsprechenden Schnitt auf eine Gerade, errichte in den einzelnen Punkten Senkrechte und mache sie gleich den Abständen 2 x, 3 y, 4 z… u. s. w. Die fragliche Figur des Netzes, die hier aus Platzmangel weggeblieben ist, kann sich jeder Schüler selbst entwerfen.

**225.** Aufgabe. Ein rundes Gefäß, welches die Form einer Umdrehungsfläche besitzt, deren Erzeugende als Hohlkehle, zur Einfachheit als Kreisbogen $e_1' e_2'$ aus dem Centrum s' angenommen, gegeben ist, soll aus einzelnen Streifen zusammengesetzt und die wahre Größe dieser Streifen gefunden werden, Fig. 116—117.

Auflösung. Von diesem Gefäß zeigt Fig. 116 die rechte Hälfte im Grund- und Aufriß, und Fig. 117 einen in die H. E. ausgebreiteten Streifen, deren 8 den halben und 16 den vollen Körper umschließen. Sollen die einzelnen Streifen mitprojicirt werden, so theile den Halbkreis A B C…J in 8 gleiche Theile wie A B = B C = C D = …, ziehe die Radien o A, o B, o C, … als H-Projektionen der Erzeugenden, theile ebenso die V-Projektion $e_1' e_2'$ der gegebenen Erzeugenden in eine Anzahl Theile wie $e_1' 1'$, $1' 2'$, $2' 3', \ldots$, die man als Geraden ansehen kann, ziehe durch die Theilpunkte 1', 2', 3', … Parallelen mit der P-Achse und zugleich Senkrechte zur P-Achse, sodann durch 1, 2, 3, … von o aus concentrische Kreise und projicire die Punkte, wo sie die Radien, wie in l, n, q, … durchschneiden, vertikal auf die zugehörigen Parallelen nach $b_1'$, l', n', q', …, so bestimmen diese

Punkte die V-Projektion der Erzeugenden oder Meridianlinie. Das Netz zu finden, ziehe, Fig. 117, eine Gerade $E_1 E_2$ und trage darauf die Theile $e_1'1'$, $1'2'$, $2'3'$,... aus Fig. 116 nach $E_1 1$, $1 2$, $2 3$,...; sodann halbire einen Theil, z. B. AB (Fig. 116) in t und ziehe o t, sowie die Sehnen AB, kl, mn, pq,..., welche die Mittellinie in u, v, w,... durchschneiden; endlich mache $E_1 A_1 = E_1 B_1 = Au = uB$, $1K = 1L = vk = vl$,... und verbinde die erhaltenen Punkte $A_1$, K, M,... $A_2$, sowie $B_1$, L, N,...$B_2$ durch stetige Kurven, so ist $A_1 A_2 B_2 B_1$ näherungsweise die Entwickelung eines Streifens, deren 16 das Gefäß zusammensetzen.

**226.** Aufgabe. Ein Gefäß in Form eines achteckigen Fußes, von dem in Fig. 118 die linke Hälfte im Grund- und Aufriß dargestellt, soll seiner Oberfläche nach entwickelt werden; man soll ein Achtel dieses Netzes finden, Fig. 119.

Auflösung. Die Projektionen wie das Netz findet man ganz ähnlich wie in der vorigen Nummer.

Man denke sich das Gefäß durch eine Ebene geschnitten, welche durch die Achse (o, $a_1'a_2'$) desselben geht und zur P-Achse parallel ist. Die Schnittlinie (12345..., $c'1'2'3'4'5'$...) bestimmt dann das Profil oder die V-Projektion der Seitenlinie, welche, wie man sieht, theils aus Geraden, theils aus krummlinigen Bogenstücken zusammengesetzt ist. Theile letztere in eine entsprechende Anzahl so kleiner Theile, daß man sie ebenfalls als Gerade ansehen kann. Ziehe hierauf in Fig. 119 eine Gerade 0 20 und trage darauf die einzelnen Theile $c'1'$, $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$, $4'5'$,... (aus Fig. 118) nach 01, 12, 23, 34, 45,... (in Fig. 119) ab, errichte in den Punkten 0, 1, 2, 3, 4, 5,... Senkrechte, mache $0C_1 = 0D_1 = 1C_2 = 1D_2 = 1C = 1D$, $2J_1 = 2K_1 = 2i = 2k$,... und verbinde die erhaltenen Punkte durch Gerade oder Kurven, je nachdem es das Profil mit sich bringt. Das erhaltene Flächenstück $C_1 C_2 J_1 J_2 N_1 N_2$ S ... V W T $D_1$, ist alsdann ein Achtel der entwickelten Oberfläche der Vase.

### c) Gewölbekonstruktionen.

(Blatt 28, Fig. 120—125.)

**227.** Eine weitere und ebenso schöne als nützliche Anwendung der darstellenden Geometrie bilden die Gewölbekonstruktionen und die Konstruktionen des Steinschnitts überhaupt.

Es kann nicht unsere Absicht sein, die für die Technik so wichtige Lehre des Steinschnitts hier vollständig zu behandeln. Wir beabsichtigen vielmehr nur, an einigen Beispielen von Gewölbekonstruktionen die Anwendung und Fruchtbarkeit der darstellenden Geometrie auch in dieser Richtung wenigstens einigermaßen zu zeigen.

Zu diesem Behufe haben wir in den Figuren 120

bis 123 ein einfaches Zylindergewölbe, ein sogenanntes Tonnengewölbe, unter verschiedenen Voraussetzungen, in Fig. 124 ein anderes zylindrisches Gewölbe, dessen Achse zu beiden Stirnflächen schief ist und endlich in Fig. 125 einen sogenannten zurückgesetzten Thorbogen mit windschiefer konoidischer Wölbungsfläche dargestellt und die Fugen- oder Lagerflächen zur Entwickelung gebracht.

**228.** Aufgabe. Darstellung eines einfachen Zylindergewölbes, eines sogenannten halben Tonnengewölbes, dessen beide Stirnflächen zur V. E. parallel und zur H. E. und zur Achse des Gewölbes senkrecht sind, Fig. 120—121. Die Lagerflächen der keilförmigen Gewölbsteine sind hier, wie in allen folgenden Fällen, ebene, auf der zylindrischen Gewölbefläche senkrecht stehende Flächen, welche, gehörig verlängert, durch die Achse ($c_1 c_2$, $c'$) des Gewölbes gehen. Die Fugen oder V-Projektionen $m' s'$, $l' r'$, $k' q'$, ... der Lagerflächen sind daher gerade, nach dem Centrum $c'$ gerichtete Linien. Bei dieser Aufgabe, wie bei den folgenden, sind 7 Gewölbsteine, 3 zu jeder Seite des Schlußsteins, angenommen worden.

In Fig. 121 sind die radialen Lagerflächen in ihrer Entwicklung in wahrer Größe gezeichnet, d. h. sie sind sammt den betreffenden Ebenen in die H. E. umgelegt worden. Dabei beschreiben die einzelnen Punkte Kreisbogen parallel zur V. E., die sich horizontal als Geraden parallel zur P-Achse und vertikal als Kreisbogen $m' a'$, $s' s_1$, $r' r_1$, $q' q_1$, ... in wahrer Größe darstellen. Bringt man dann noch $s_1$, $r_1$, $q_1$, ... nach $S_1 S_2$, $R_1 R_2$, $Q_1 Q_2$, ... so sind $A_1 A_2 S_2 S_1$, $A_1 A_2 R_2 R_1$, $A_1 A_2 Q_2 Q_1$, ... die in die H. E. umgelegten Lagerflächen der Gewölbsteine. Auf der andern Seite sind dieselben gleich.

Der Grundriß der Fig. 121 stellt zugleich einen horizontalen Schnitt des Gewölbes durch die Achse desselben nebst der Ansicht von unten nach oben dar. Die mit der Gewölbachse parallelen Fugen $m_1 m_2$, $l_1 l_2$, $k_1 k_2$, ... sind deßhalb sichtbar, die obern Begrenzungsfugen, wie $s_1 s_2$, $r_1 r_2$, $q_1 q_2$, ..., dagegen unsichtbar.

**229.** Aufgabe. Wäre das Gewölbe des vorigen Beispiels auf einer, z. B. der vordern Seite durch eine zur H. E. noch senkrechte, zur V. E. aber schiefe Ebene $F_2 H$, Fig. 121, abgeschnitten, so bliebe sich die Konstruktion ganz gleich. Nur die Schablonen oder die Entwickelungen für die radialen Lagerflächen würden sich etwas ändern. Dieselben sind auf der rechten Seite bei $E B_1 T_1 T_2$, $E B_1 U_1 U_2$, $E B_1 V_1 V_2$, ... in der Umlegung und in wahrer Größe angegeben. Ebenso werden auch die auf der linken Seite bestimmt, welche indessen, um den Platz nicht zu überfüllen, in der Figur nicht weiter angegeben worden sind.

**230.** Aufgabe. In diesem Beispiel ist die vordere Stirnfläche zur H. E. und zur V. E. geneigt, zur P-Achse aber parallel, daher muß außer dem Aufriß Fig. 120 und der Breite der Mauerfläche

Fig. 122 auch noch die Neigung der vordern Stirnfläche gegeben sein. Dieß ist zur Seite der Fig. 120 rechts durch die Hülfsfigur $g'y''z''$, welche eine Seitenprojektion der Böschungsmauer darstellt, geschehen. Damit läßt sich sofort auch die H-Projektion oder der Grundriß Fig. 122 finden.

Man ziehe nämlich durch die Punkte $p'$, $o'$, $n'$, $x'$,... Parallelen und Senkrechten zur P-Achse, projicire die Durchschnittspunkte $p''$, $o''$, $n''$, $x''$,... horizontal nach $p$, $o$, $n$, $x$,... auf die Verlängerung der obern Begrenzungslinie der Böschungswand, drehe diese Punkte von $z$ aus, als Centrum, auf die zur P-Achse Senkrechte $G_1 G_2$ und ziehe durch letztere Punkte Parallelen zur P-Achse, so werden diese von den entsprechenden Senkrechten $p' p_2$, $o' o_2$, $n' n_2$,... in den verlangten Projektionen $p_2$, $o_2$, $n_2$,... geschnitten. Verbindet man diese Punkte durch eine stetige krumme Linie (halbe Ellipse) $B_2 p_2 o_2 n_2 x_2 \ldots A_2$, so ist dieß die H-Projektion der in der schiefen Böschungsmauer liegenden sichtbaren Wölblinie. Zieht man $c_2 p_2$, $c_2 o_2$, $c_2 n_2$,..., gehörig verlängert, so erhält man die H-Projektionen $p_2 v_2$, $o_2 u_2$, $n_2 t_2$,... der Figur. Und zieht man durch $p_2$, $o_2$, $n_2$,... mit der Gewölbachse $c_1 c_2$ Parallelen, so sind dieß die H-Projektionen der innern Fugenlinien, die aber, weil der Grundriß der Figur 122 von oben nach unten genommen ist, unsichtbar sind, während die äußeren Fugen, wie $s_1 s_2$, $t_1 t_2$,..., sichtbar sind. Die Lagerflächen endlich sind, um sie für die Bearbeitung der Steine als Schablonen in wahrer Größe zu erhalten, auf der linken Seite in die H. E. nach $A_1 M_2 S_2 S_1$, $A_1 L_2 R_2 R_1$, $A_1 K_2 Q_2 Q_1$ umgelegt worden. Die auf der rechten Seite sind denselben gleich, daher nicht entwickelt worden.

231. Aufgabe. Ist endlich die vordere Stirnfläche zur H. E. und zur V. E. geneigt und zur P-Achse schief, so findet man aus dem gegebenen Aufriß der Fig. 120, wobei die Neigung der vordern Böschungswand wieder durch die rechter Hand gegebene Seitenansicht $g'y''z''$ bestimmt ist, die H-Projektion des Gewölbes in Fig. 123 ganz auf dieselbe Weise wie in dem vorigen Fall.

Die Punkte $p''$, $o''$, $n''$,... projicirt man nämlich wieder horizontal nach $p$, $o$, $n$,... auf die im Endpunkt $z$ der obern Begrenzungslinie $s_2 t_2$ zur P-Achse gezogenen Parallelen $zy$, dreht dieselben aus $z$ als Centrum auf die zur P-Achse Senkrechte $G_1 G_2$ und zieht durch die letztern Punkte mit $z s_2$ Parallelen, so werden diese von den entsprechenden vertik. proj. L. $p' p_2$, $o' o_2$, $n' n_2$,... in den verlangten Punkten $p_2$, $o_2$, $n_2$,... geschnitten. Damit ist sowohl die H-Projektion $B_2 p_2 o_2 n_2 \ldots A_2$ der Wölblinie als auch die H-Projektionen $p_2 v_2$, $o_2 u_2$, $n_2 t_2$,... der Fugen, welche auch hier verlängert durch das Centrum $c_2$ gehen, bestimmt.

Die innern unsichtbaren Fugen $p_1 p_2$, $o_1 o_2$, $n_1 n_2$,... wie die äußern $s_1 s_2$, $t_1 t_2$,... sind parallel der Gewölbachse $c_1 c_2$ und daher ebenfalls bekannt.

Die radialen Lagerflächen, die auf jeder Seite der einzelnen Gewölbsteine verschieden sind, sind, um sie zur Bearbeitung der letztern als Schablonen in wahrer Größe zu erhalten, theils zur rechten, theils zur linken Seite nach $A_1 M_2 S_2 S_1$, $A_1 L_2 R_2 R_1$, $A_1 K_2 Q_2 Q_1$, $B_1 N_2 T_2 T_1$, $B_1 O_2 U_2 U_1$, $B_1 P_2 V_2 V_1$ in die H. E. umgelegt werden.

232. Aufgabe. Das Gewölbe sei ein Zylindergewölbe, dessen Achse auf beiden zur H. E. senkrechten und zur V. E. parallelen Stirnflächen schief ist. Die Fig. 124 zeigt von demselben den Aufriß und Grundriß, resp. den Horizontalschnitt von unten nach oben.

Die Gewölbfläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich die Halbkreislinie $a_1' b_1' c_1' d_1' \ldots$ als Wölblinie der vordern Stirnfläche stets parallel mit sich und den Mauerflächen und so bewegt, daß der Mittelpunkt fortwährend in der Achse $(J_1 J_5, i_1' i_5')$ bleibt.

Wie man sieht, sind fünf Stellungen dieser Erzeugenden, die sich horizontal als die parallelen Geraden $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$, $A_4 H_4$, $A_5 H_5$ und vertikal als die Halbkreise $a_1' b_1' c_1' \ldots g_1'$, $a_2' b_2' c_2' \ldots g_2'$, ..., $a_5' b_5' c_5' \ldots g_5'$ — mit den Mittelpunkten $(J_1, i_1')$, $(J_2, i_2')$, ..., $(J_5, i_5')$ — projiciren, angegeben. Durch die Mitte $(J_3, i_3')$ der Gewölbachse denke man sich ferner $(O_1 O_2, i_3')$ senkrecht zu den Stirnflächen gezogen und durch diese Gerade zu den Stirnflächen und der V. E. senkrechte Ebenen gelegt, deren Durchschnittsflächen mit dem Gewölbe die Lagerflächen der Gewölbsteine bilden. Die radialen Geraden $b_5' q'$, $c_5' r'$, $d_5' s'$... sind dann die V-Projektionen und die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Kurven $b_1 b_2 b_3 \ldots b_5$, $c_1 c_2 c_3 \ldots c_5$, $d_1 d_2 d_3 \ldots d_5$, ... die H-Projektionen der in der innern Wölbungsfläche sichtbaren, von unten nach oben gesehenen Fugenschnitte. Bei der Eintheilung für die einzelnen Gewölbsteine wird die mittlere Halbkreislinie $(A_3 b_3 c_3 \ldots H_3, a_3' b_3' c_3' \ldots g_3')$ zu Grunde gelegt. Im Grundriß sind die Lagerflächen wiederum in die H. E. nach $B_1 Q_1 Q_2 B_5$, $C_1 R_1 R_2 C_5$, $D_1 S_1 S_2 D_5$, $E_1 T_1 T_2 E_5$, ... umgelegt worden und dienen als Schablonen bei der Bearbeitung der einzelnen Gewölbsteine.

233. Aufgabe. Das Gewölbe sei ein sogenannter zurückgesetzter Thorbogen (auch Marseillanerbogen genannt) mit windschiefer konoidischer Wölbungsfläche. Die Figur 125 zeigt davon den Aufriß und Grundriß resp. den Horizontalschnitt von unten nach oben.

Der mit einem Anschlag (B C D G H J, b' s' i' h' g' t' d' c') versehene zylindrische Bogen (D E F G, d' t' g') ist nach vornen erweitert und zwar auf beiden Seiten durch vertikale ebene Flächen (die Schmiegflächen) und oben durch eine windschiefe konoidische Fläche (die Wölbungsfläche).

Die letztere kann man sich auf folgende Weise entstanden denken. (B J, b' s' i') sind die Projektionen eines Halbkreises und (A K, $p_1' r' q_1'$) die Projektionen

eines flachen Bogens. Die Ebenen beider Kreisbogen sind untereinander und mit der V. E. parallel. Ihre Centrien befinden sich in einer zur H. E. und V. E. senkrechten Ebene. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der H. E. bilde die Achse, in welcher die Ebenen der Lagerflächen sämmtlicher Gewölbsteine sich vereinigen.

Man denke sich den vordern, flachen Kreisbogen (A K, $p_1' r' q_1'$) bis zur H. E. in ($W_1$, $w_1'$) verlängert. Lege durch die erwähnte Achse des Gewölbes eine Ebene und gebe ihr beliebige Neigungen. Man verbinde diejenigen Punkte, in welchen diese Ebene in ihren verschiedenen Lagen die beiden Leitlinien, den Halbkreisbogen $b' s' i'$ und den flachen Bogen $p_1' r' q_1'$ schneidet, durch gerade Linien, so können diese als V-Projektionen der Lagerflächen des Gewölbes angesehen werden.

Projicirt man die Punkte $y_1'$, $y_4'$, $z_1'$, $z_4'$, ... horizontal nach $y_1$, $y_4$, $z_1$, $z_4$, ... und verbindet die erhaltenen Punkte durch Gerade $y_1 y_4$, $z_1 z_4$, ..., so sind dieß die H-Projektionen der ebenfalls von unten nach oben gesehenen Fugen oder Schnittlinien der Lagerflächen mit der kegelartigen Wölbungsfläche.

Um ferner die Schnittlinien der beiden senkrechten, sich nach vorn erweiternden ebenen Seitenflächen mit der Wölbungsfläche zu finden, denke man sich das Gewölbe parallel zur Stirnfläche und zur V. E. durch Ebenen geschnitten. Ihre H-Risse sind die zur P-Achse parallelen Geraden $p_2 z_2$, $p_3 z_3$, ... und die V-Projektionen ihrer Schnittlinien mit der Wölbungsfläche erhält man, wenn man die Punkte $x_2$, $x_3$, ..., $y_2$, $y_3$, ..., $z_2$, $z_3$, ... vertikal auf die zugehörigen Fugenlinien nach $x_2'$, $x_3'$, ..., $y_2'$, $y_3'$, ..., $z_2'$, $z_3'$, ... bringt und die erhaltenen Punkte $x_2'$, $y_2'$, $z_2'$, ..., $x_3'$, $y_3'$, $z_3'$, ... durch die Kurven $w_2' x_2' v' y_2' z_2' q_2'$.., $w_3' x_3' u' y_3' z_3' q_3'$..,... verbindet. Mit Hülfe dieser Kurven und der H-Projektionen AB und KJ ist es nun leicht, die V-Projektionen der Durchschnittslinien der Schmiegflächen mit der konoidischen Wölbungsfläche zu finden. Denn projicirt man $p_2$, $p_3$, ... auf die Kurven nach $p_2'$, $p_3'$, ... und $p_4$ auf die Fugenlinien $x_1' x_4'$ nach $p_4'$ und verbindet diese Punkte durch eine stetige Kurve $p_1' p_2' p_3' p_4' b'$, so ist dieß die verlangte V-Projektion.

Wird die Schmiegfläche um AB als Drehachse in die H. E. nach $A B P_3 P_2 P_1$ umgelegt, indem man in A, $p_2$, $p_3$ Senkrechte zu AB errichtet und $A P_1 = a' p_1'$, $p_2 P_2 = \pi p_2'$, ... macht und die erhaltenen Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... B durch eine stetige Linie verbindet, so erhält man sowohl die wahre Größe der Schnittlinie als der Schmiegfläche selbst. Ebenso sind auch die Lagerflächen der Gewölbsteine nach $E D C B P_4 P_5 E$, $F G H J Z_1 Z_0 Z_6 F$, $F G H J Y_1 Y_0 Y_6 F$ durch Umlegung in die H. E. in wahrer Größe gefunden worden.

# Inhalt.

# Berichtigungen.

## Im 1. Heft:

| Seite | Spalte | Zeile | |
|---|---|---|---|
| 13 | 2 | 10 | v. u. lese: Rehbach statt Rebach. |
| 34 | 2 | 5 | v. o. lese: Stücke statt Stück. |
| 41 | 1 | 2 | v. o. lese: Zehneckseite statt Zwanzigeckseite. |
| 45 | 2 | 14 | v. o. lese: diese statt dieser. |
| 46 | 1 | 4 | v. u. „an diese“ streichen. |
| 47 | 1 | 8 | v. u. lese: G 1, H 2, I 3, K 4 statt $G_1$, $H_2$, $I_3$, $K_4$. |
| 47 | 1 | 7 | v. u. lese: A 1, A 2, A 3, statt $A_1$, $A_2$, $A_3$. |
| 48 | 1 | 2 | v. o. lese: 1′ F′ statt 1′ F. |
| 49 | 1 | 2 | v. u. lese: ihren statt ihre. |
| 49 | 2 | 3 | v. o. lese: $H_1$ Q statt H Q. |
| 51 | 1 | 6 u. 7 | v. o. lese: C 1, C 2, C 3, statt $C_1$, $C_2$, $C_3$. |
| 55 | 1 | 3 | v. o. lese: schneidet statt schneiden. |

In den lith. Tafeln ist in Fig. 9 zum untern Kreuzungspunkt der Bogen G und in Fig. 15 in der obern Linie C statt E zu setzen und in Fig. 83 die Linie E $H_1$ über $H_1$ hinaus zu verlängern und mit Q zu bezeichnen.

## Im 2. Heft:

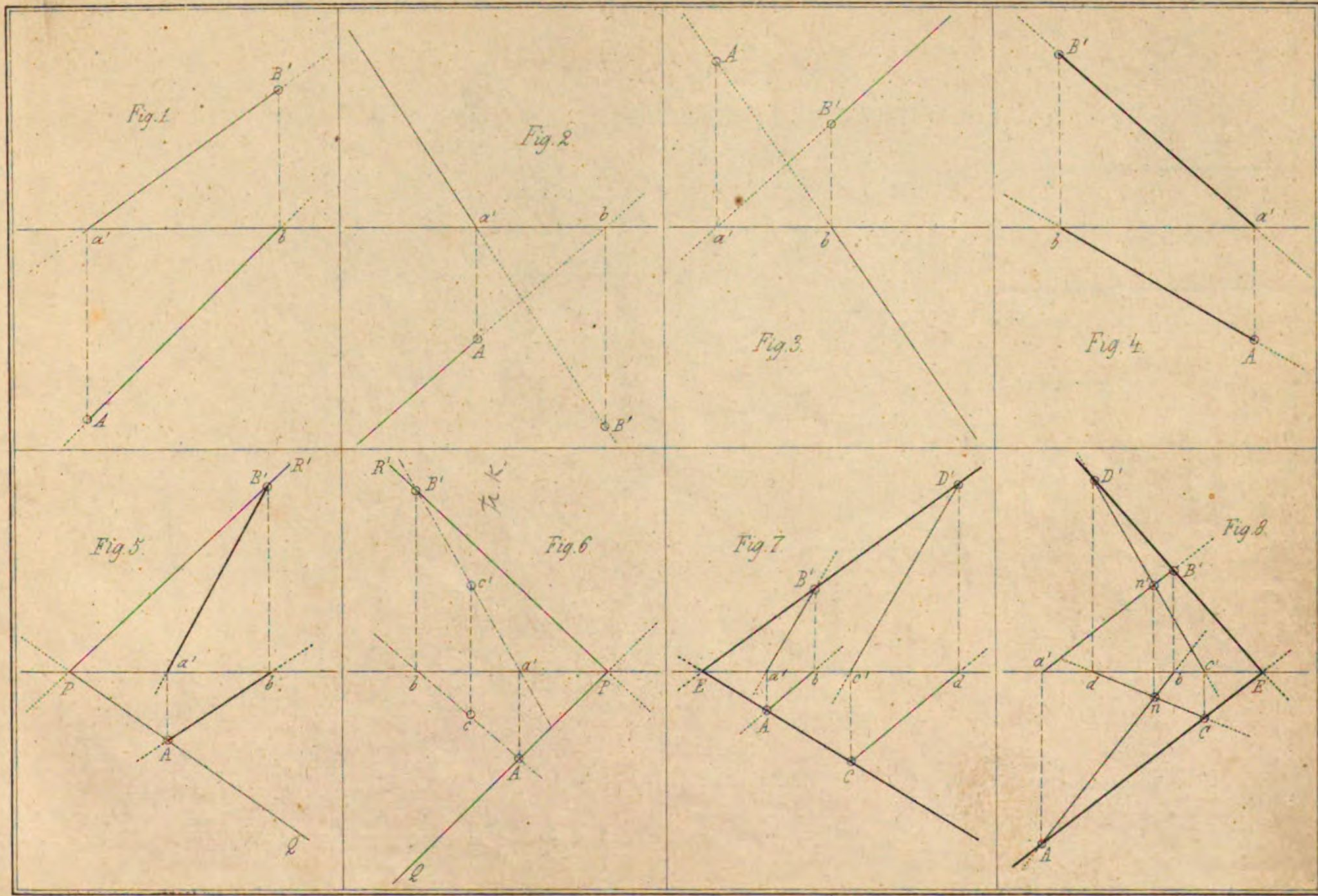
| Seite | Spalte | Zeile | |
|---|---|---|---|
| 25 | 2 | 6 | v. o. lese: Projektionen statt Projektion. |
| 25 | 2 | 13 | v. u. lese: p′ q′ statt $p' q_1$. |
| 26 | 1 | 13 | v. u. lese: Q′, q statt $Q_1'$ q. |
| 26 | 1 | 5 | v. u. lese: $P_1 Q_1$ statt $P_1 Q'$. |
| 26 | 2 | 9 | v. u. lese: q $Q_1$ ⊥ zu P q statt $q_1 Q_1$ ⊥ zu p q. |
| 26 | 2 | 7 | v. u. lese: p′ Q′ statt $p' Q_1$. |
| 26 | 2 | 3 | v. u. lese: q $P_2' Q'$ statt p $P_2' Q'$. |
| 27 | 1 | 11 | v. o. lese: $n q' p_1' m_1$ statt $n p' p_1' m_1$. |
| 27 | 1 | 5 | v. u. „P“ streichen. |
| 27 | 2 | 14 | und 11 v. u. lese: (p′, q′) statt ($p_1'$ q′). |
| 28 | 1 | 6 | v. o. lese: h. p. L. statt h. p. E. |
| 29 | 1 | 1 | v. o. lese: der verlangten statt oder erlangten. |
| 29 | 2 | 10 | v. u. lese: p′ Q′ statt p Q′. |
| 32 | 2 | 6 | v. u. lese: $e_1 k_1$ statt $e_1 h_1$. |
| 33 | 2 | 13 | v. o. lese: a′ n′ statt a′ m′. |
| 34 | 1 | 4 | v. o. lese: g $\beta$ statt g $\beta_1$. |
| 34 | 1 | 11 | v. o. lese: . . . $n_1'$ statt $n_1$. |
| 38 | 1 | 6 | v. o. lese: Begrenzungslinien statt Begrenzungslinie. |
| 38 | 2 | 13 | v. o. lese: es statt er. |
| 39 | 1 | 2 | v. o. lese: $b_1'$, $b_2'$ statt $b_1' b_2'$. |
| 41 | 1 | 11 | v. u. lese: in statt und. |
| 41 | {1<br>{2 | 1 v. u.<br>1 v. o. | } lese: e $H' E_1'$ statt e $H_1' E_1'$. |
| 41 | 2 | 10 | v. u. lese: R′ S′ statt R S. |
| 42 | 1 | 10 | v. u. lese: schiefen Linien statt schiefe Linie. |
| 46 | 1 | 7 | v. o. lese: Symmetrieachse statt Symetrieachse. |
| 46 | 2 | 12 u. 13 | v. o. „statt dem Kreis“ streichen. |
| 46 | 2 | 14 | v. o. lese: Parabel als Leitende und eine Ellipse statt Parabel als. |
| 51 | 1 | 10 | v. o. vor „oder“ einzuschieben: und eine Lage der Erzeugenden (A s, a′ s′). |
| 53 | 1 | 4 | v. o. lese: andere gewundene krumme statt andern gewundenen krummen. |
| 57 | 2 | 15 | v. o. lese: B g statt B З. |
| 60 | 1 | 9 | v. o. lese: geschieht statt geschieh. |
| 62 | 1 | 4 | v. u. lese: 1′ $I_1'$ statt 1′ $II_1'$. |
| 63 | 2 | 4 u. 2 | v. u. lese: $s\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ statt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. |
| 64 | 1 | 5 | v. o. lese: $\frac{s}{3}\sqrt{3}$, $s\sqrt{\frac{2}{3}}$ statt $\frac{s}{3}\sqrt{3}$, $s\sqrt{\frac{2}{3}}$. |

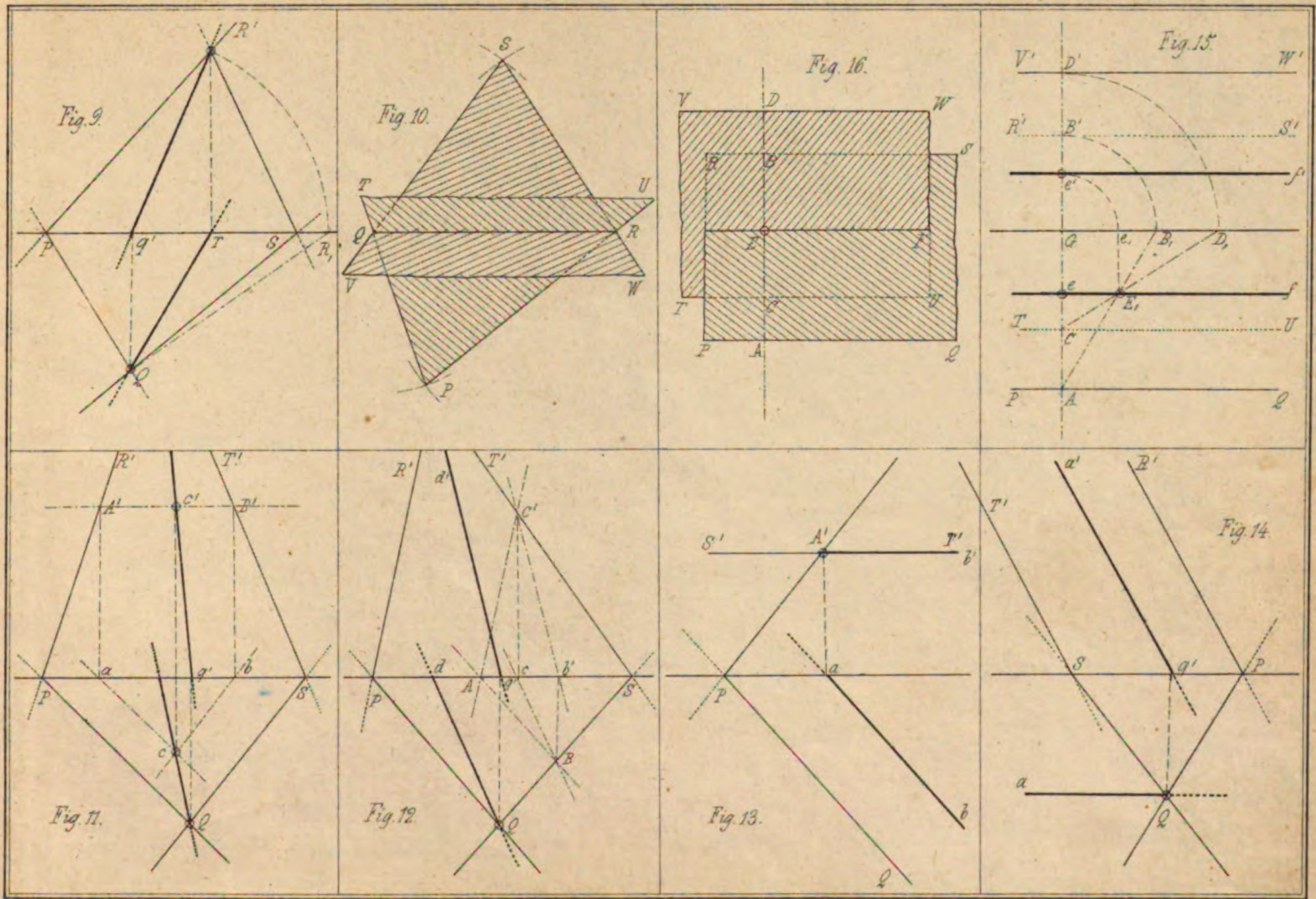
| Seite | Spalte | Zeile | |
|---|---|---|---|
| 64 | 1 | 2 v. u. | lese: symmetrisch statt symetrisch. |
| 65 | 1 | 9 v. o. | lese: symmetrisch statt symetrisch. |
| 66 | 1 | 4 v. o. | lese: symmetrisch statt symetrisch. |
| 66 | 2 | 10 v. o. | lese: symmetrisch statt symetrisch. |
| 67 | 1 | 11 v. u. | lese: symmetrisch statt symetrisch. |
| 64 | 2 | 7 v. o. | lese: Höhe statt Höhe h. |
| 64 | 2 | 12 v. o. | lese: $a'$, $b'$, $c'$, $d'$,… statt $a_1'$ $b_1'$ $c_1'$ $d_1'$… |
| 65 | 2 | 10 v. o. | lese: $a'\,g'$ statt $a'\,g_1$. |
| 65 | 2 | 11 v. u. | lese: $p\,P_1$ statt $p\,p_1$. |
| 66 | 2 | 5 und 6 v. u. | lese: $n_1$ statt $n\,n_1$ und $n_1\,n_1$. |

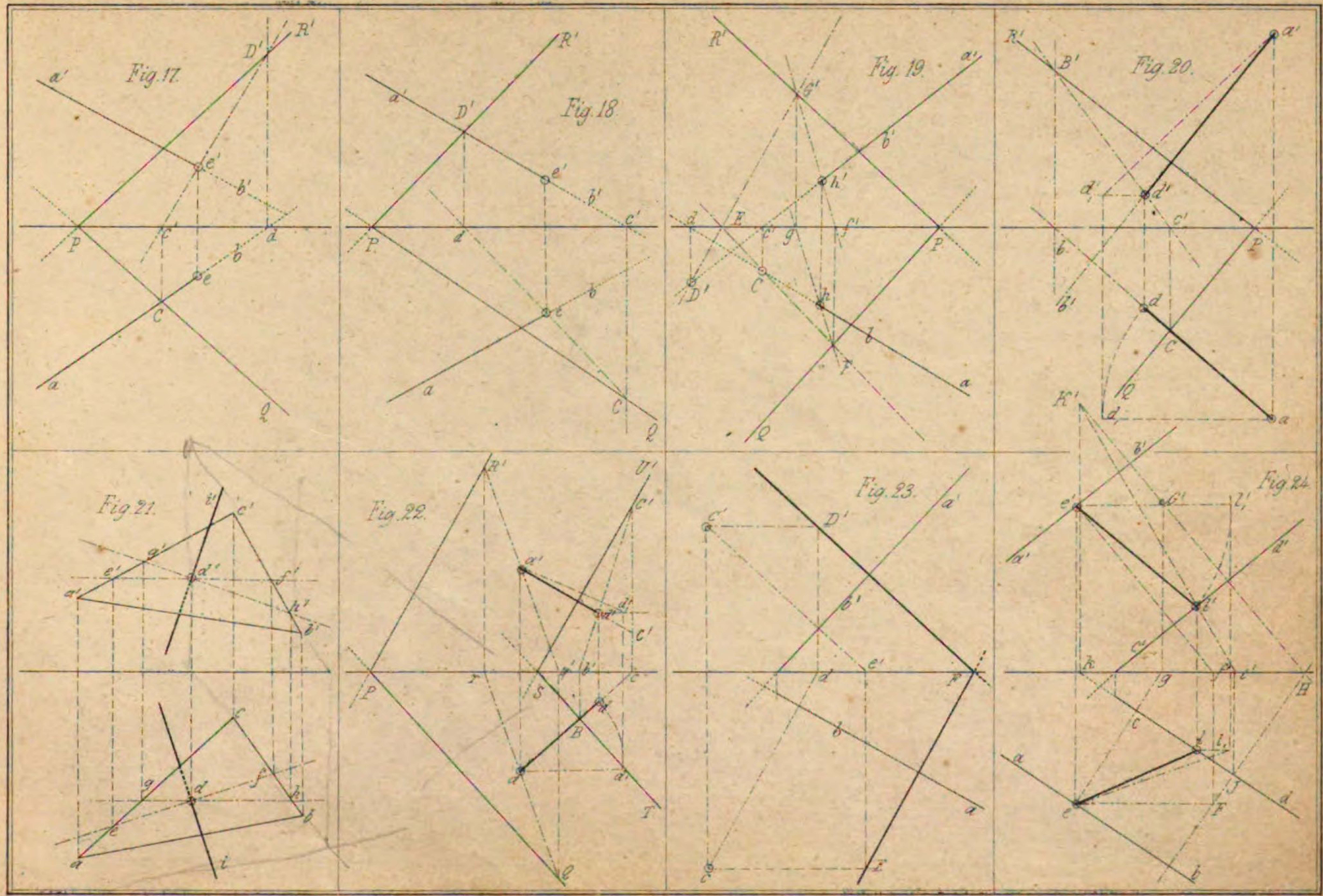
## Im 3. Heft:

| Seite | Spalte | Zeile | |
|---|---|---|---|
| 11 | 1 | 13 v. o. | lese: $B'$ statt $b'$. |
| 13 | 2 | 6 v. u. | vor „deren“ setze ein Komma und $C'$ statt $C$. |
| 14 | 1 | 6 v. o. | lese: $S'$ statt $S$. |
| 14 | 2 | 9 v. u. | lese: $(Q\,a,\ q'\,a')$ statt $(Q\,a',\ q'\,a')$. |
| 16 | 1 | 10 v. o. | lese: $c'\,D'$ statt $c\,D'$. |
| 16 | 2 | 3 v. o. | nach $(h,\ h')$ schiebe ein: des Durchschnittspunktes. |
| 17 | 2 | 9 v. o. | lese: Dreiecksebene statt Dreiecksebenen. |
| 18 | 2 | 9 v. u. | lese: $a'\,d_1'$ statt $a'\,d'$. |
| 20 | 1 | 3 v. o. | lese: II statt I. |
| 20 | 2 | 10 v. o. | das Komma nach horizontal streichen. |
| 21 | 1 | 5 v. o. | lese: $(d\,b\,e,\ d'\,b'\,e')$ statt $(a\,b\,c,\ a'\,b'\,c')$. |
| 23 | 1 | 14 v. o. | lese: §. 40, Fig. 27 statt §. 34, Fig. 22. |
| 25 | 1 | 6 v. o. | lese: an den statt von den. |
| 25 | 1 | 11 v. u. | lese: Schenkel statt Scheitel. |
| 29 | 1 | 7 v. o. | setze vor „Die“ §. 65. |
| 29 | 1 | 14 v. o. | lese: $I'\,I'$ statt $1'\,I$. |
| 29 | 1 | 10 v. u. | lese: $2\,II_1$ statt $2\,II$. |
| 29 | 1 | 7 v. u. | lese: $I_1'$ statt $1_1'$ und $II_1'$ statt $2_1'$. |
| 32 | 1 | 14 v. o. | lese: $F\,F$ statt $F\,F'$. |
| 33 | 2 | 13 v. o. | §. 148 statt §. 68. |
| 38 | 1 | 5 v. u. | lese: $IV\alpha'$ statt $IV\alpha_1$. |
| 43 | 2 | 10 v. o. | lese: oder statt und. |
| 49 | 2 | 12 v. u. | lese: 78 statt 58. |
| 49 | 2 | 7 v. u. | lese: II. 1 statt $II_1$. |
| 51 | 1 | 1 v. o. | lese: (§. 98 und 99) statt (§. 88 und 89). |
| 55 | 2 | 6 und 14 v. o. | lese: Meridian statt Parallelkreis. |
| 55 | 2 | 10 v. o. | nach den füge bei: hinzu. |
| 56 | 1 | 9 v. u. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 57 | 1 | 7 v. o. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 57 | 2 | 5 v. o. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 58 | 1 | 13 v. o. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 58 | 2 | 14 v. o. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 59 | 1 | 11 v. o. | lese: $G'H'J'K'L'M'$ statt $g'h'i'k'l'm'$. |
| 57 | 2 | 12 v. o. | lese: parallele Gerade statt parallelen Geraden. |
| 62 | 1 | 12 v. o. | lese: Richtungsebene statt Tangirungsebene. |
| 64 | 1 | 1 v. o. | lese: Hülfsebene statt Hülfsebenen. |
| 65 | 1 | 10 v. u. | lese: $r_1\,r_2$ statt $r_1,\ r_2$. |
| 67 | 1 | 5 v. u. | lese: $k\,l,\ k'\,l'$ statt $h\,l,\ h'\,l'$. |
| 77 | 1 | 7 v. u. | horizontalen vor Parallelkreis streichen. |
| 86 | 2 | 7 v. u. | lese: Durchschnittskurve statt Durchschnittspunkte. |
| 87 | 1 | 2 v. o. | lese: $t\,s_1\,u\,s_2$ statt $t_1\,s_1\,u\,s_2$. |
| 88 | 1 | 4 v. u. | lese: nach $u'\,w''\,v'$ statt $u'\,w''\,v'$. |
| 92 | 2 | 11 v. u. | lese: $C\,F_2$ statt $C\,F_1$. |
| 94 | 1 | 9 v. o. | lese: $e\,\alpha'$ statt $e'\,a'$. |
| 104 | 1 | 4 v. o. | lese: $b_1'\,c_1'$ statt $b_1\,c_1'$. |

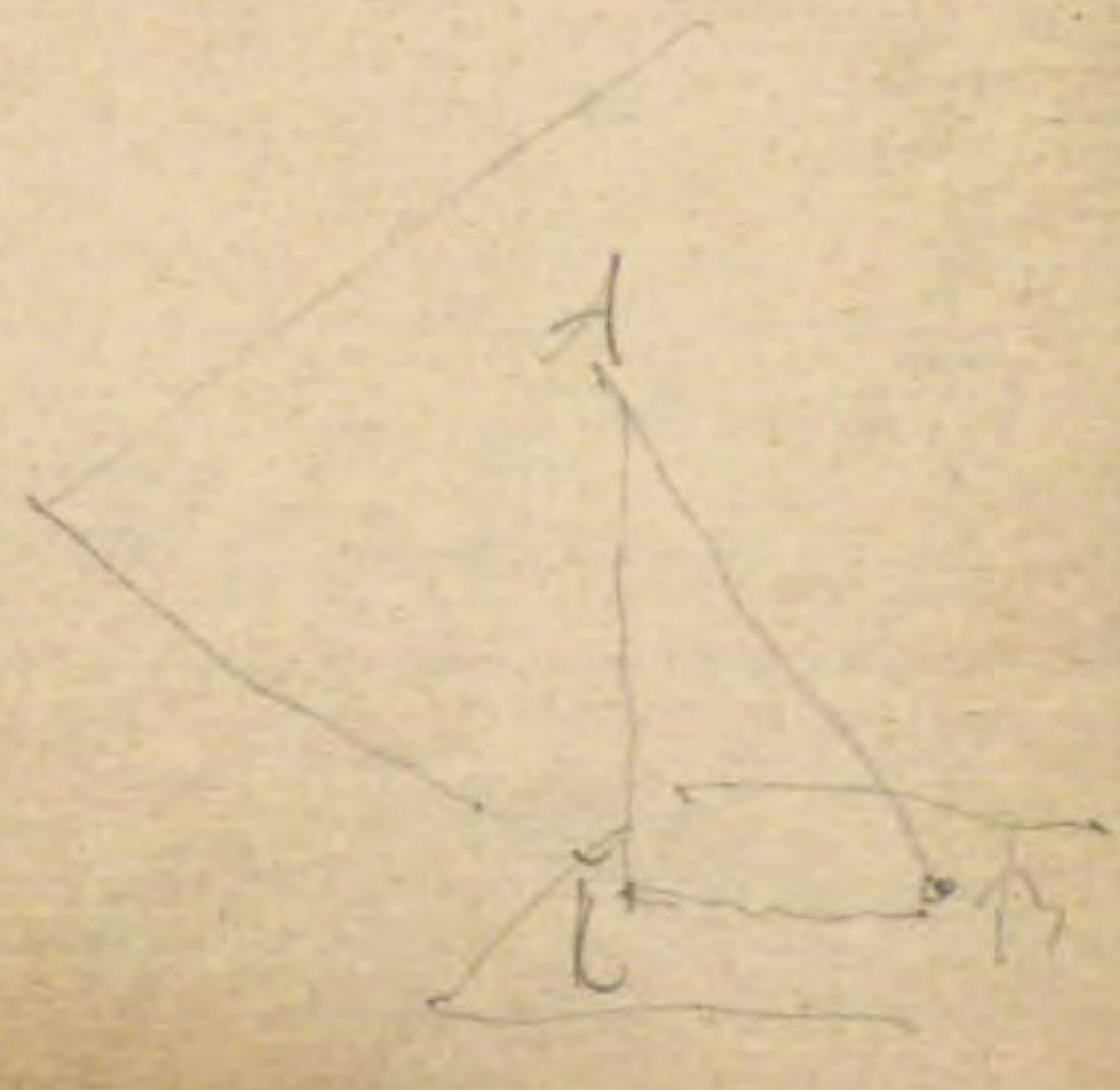
In den lith. Tafeln ist in Fig. 13 zum V-Riß $R'$ zu setzen; in Fig. 25 die V-Projektion $k'$ statt $k$; in Fig. 44 die V-Projektion $s'$ statt $s$; in Fig. 46 in der vertikalen Umlegung $N_1'$ statt $N'$; in Fig. 48 in der Achse $g'$ und $1'$ statt $g$ und $1$; in Fig. 56 $\beta\,H_2$ statt $\beta\,H$; in Fig. 62 $L$ zur Tangente $K\,L$; in Fig. 80 zur proj. L. von $s$ in die Achse $s_1$ und die H-Projektion $V_1$ zu $V_1'$; in Fig. 87 die H-Projektion $m$ zu $m'$; in Fig. 89 im Aufriß $\beta'\,\gamma'$ statt $\beta\,\gamma'$; in Fig. 110 $\omega'$ statt $\omega_1$ und in der Achse $r'$ statt $r$; in Fig. 116 die V-Projektionen $l'$, $n'$ statt $l$, $n$; in Fig. 123 die Umlegung $K_2$ und in Fig. 125 die V-Projektion $p_3'$ statt $p_1$ beizufügen, und in Fig. 121 die Schablonen rechts wie in Fig. 122 und 123 auszuführen.

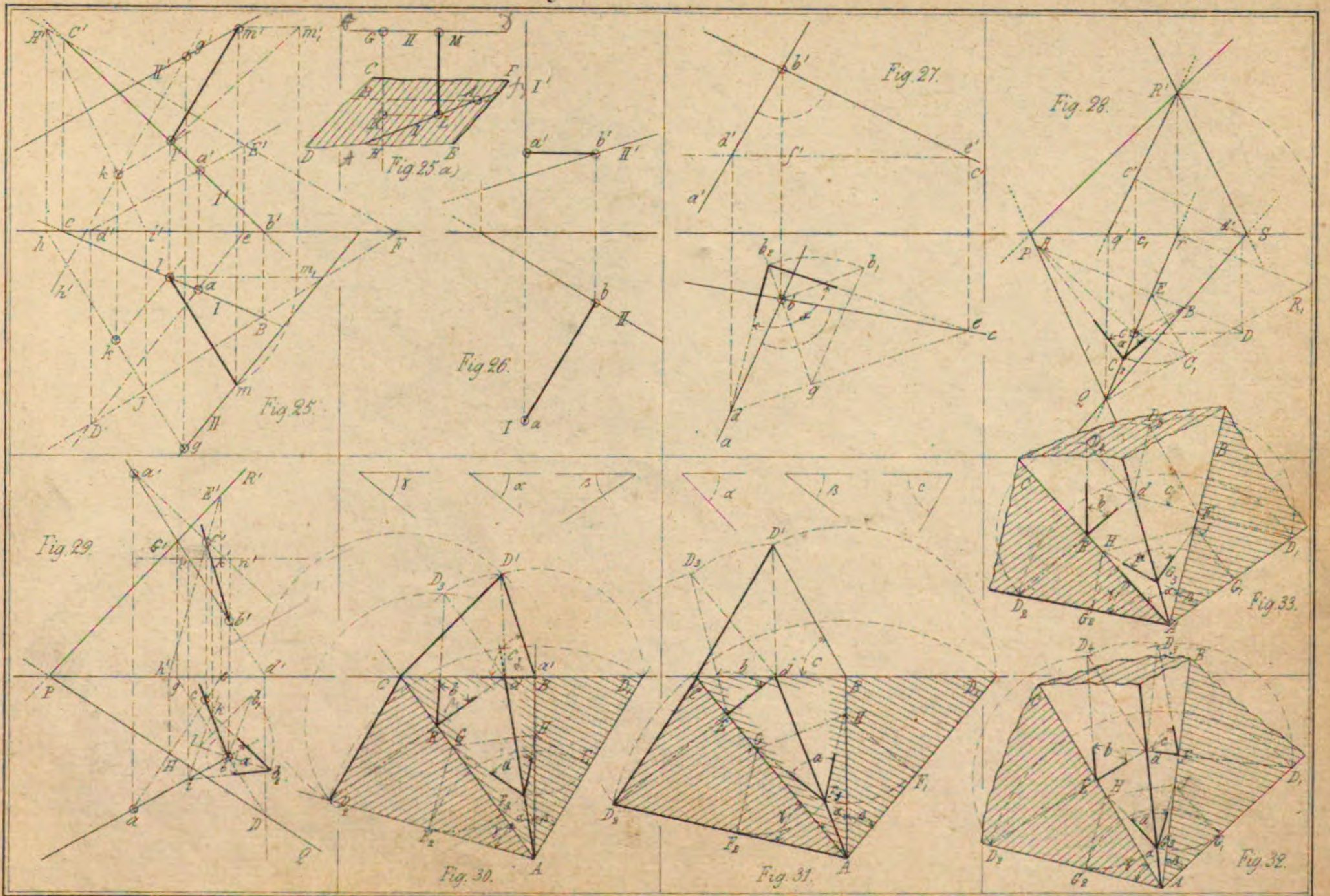

Fig. 1.
B'
a'
b
A
Fig. 2.
a'
b
A
B'
Fig. 3.
A
B'
a'
b
Fig. 4.
B'
a'
b
A
Fig. 5.
B'
R'
a'
P
b
A
Q
Fig. 6.
R'
B'
c'
b
a'
P
c
A
Q
Fig. 7.
D'
B'
E
a'
b
c'
d
A
C
Fig. 8.
D'
B'
n'
a'
d
b
c'
E
n
C
A


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 16.
Fig. 15.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.




Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen. Gez. v. G. Delabar.




Fig. 25
Fig. 25 a)
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33

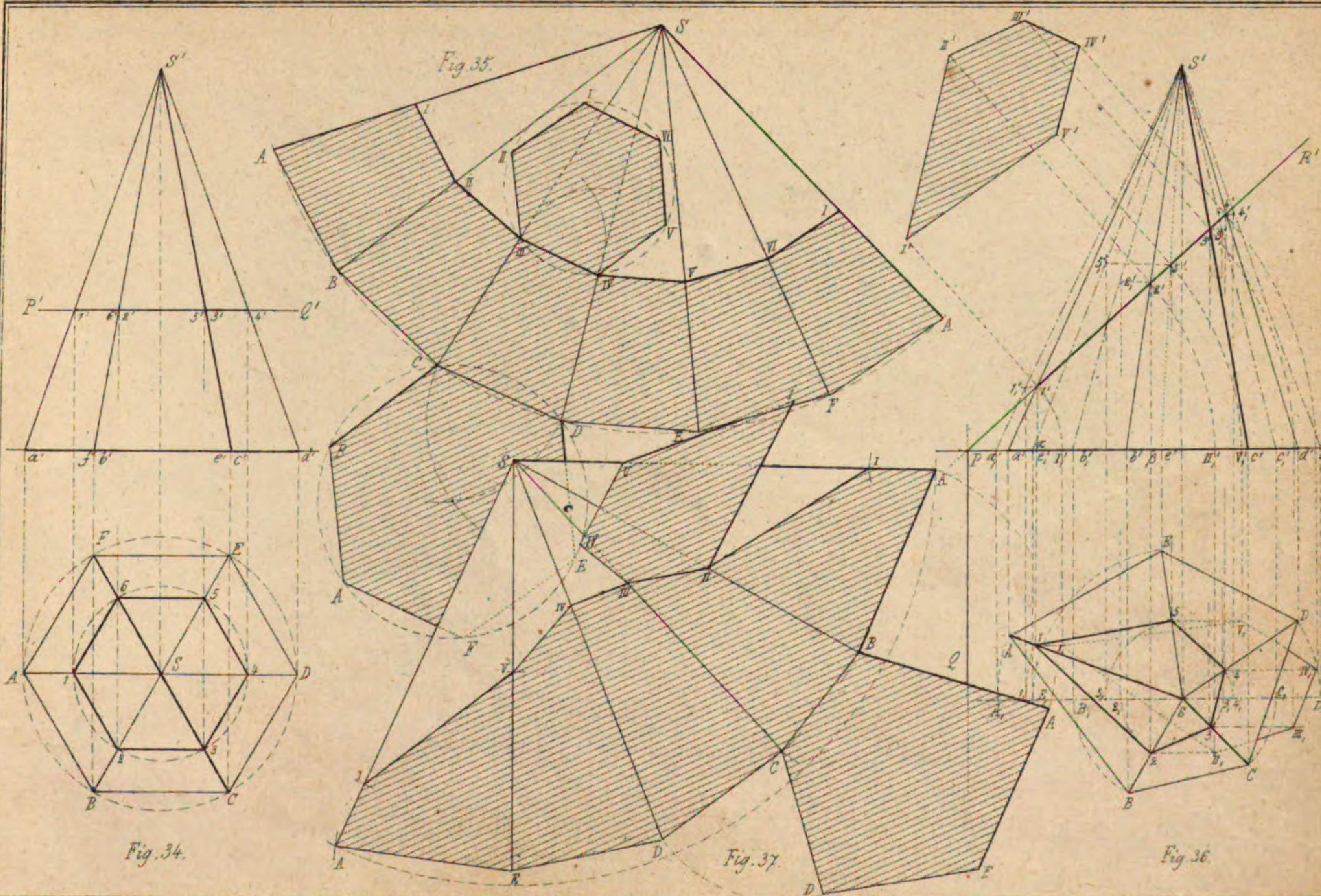


Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36. Fig. 37.

Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen. Gez. v. G. Delabar

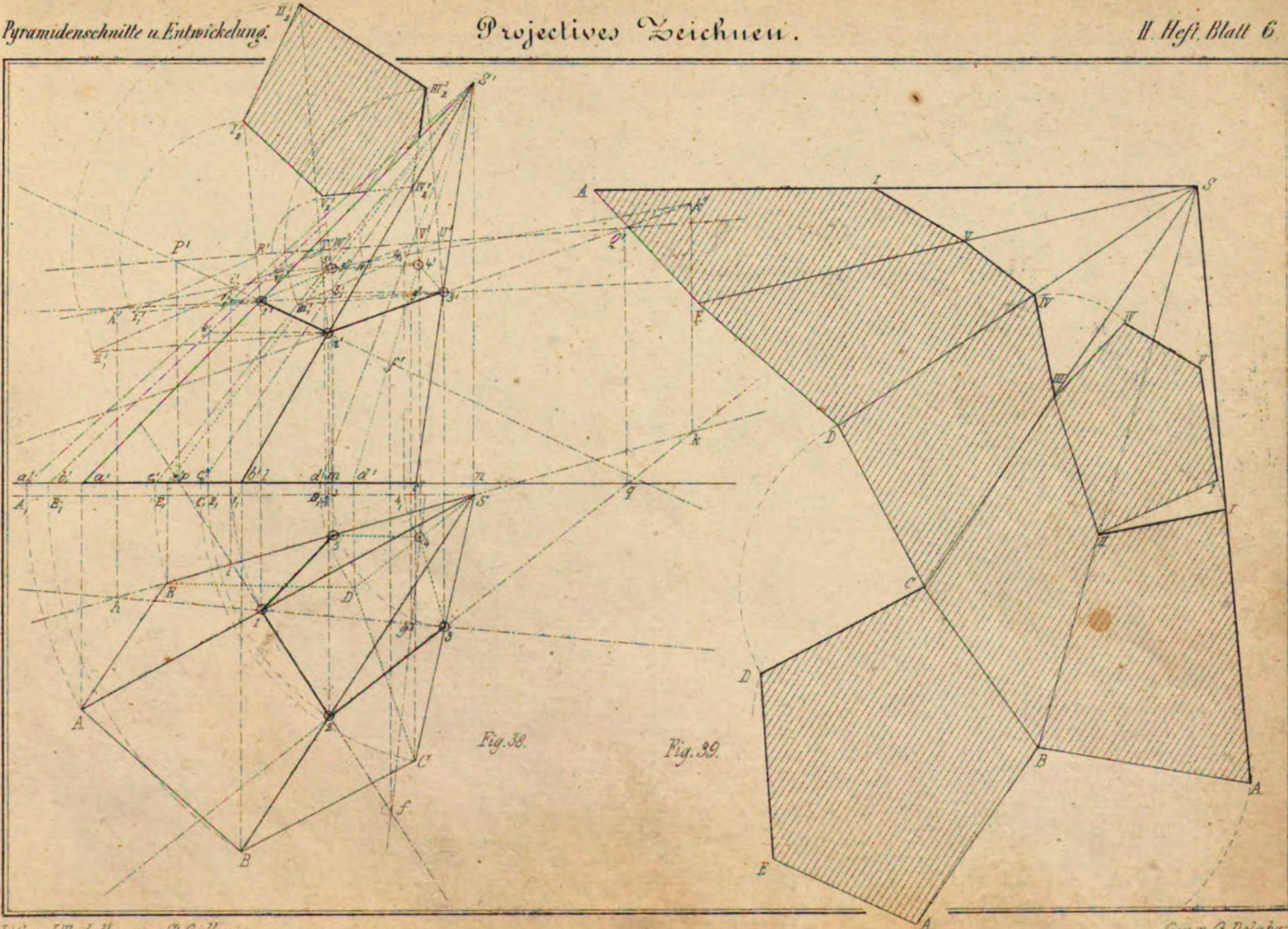


Fig. 38. Fig. 39.

Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen. Gez. v. G. Delabar


Fig. 40. Fig. 41.

Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen. Gez. v. G. Delabar.

# Projectives Zeichnen.



Fig. 42.

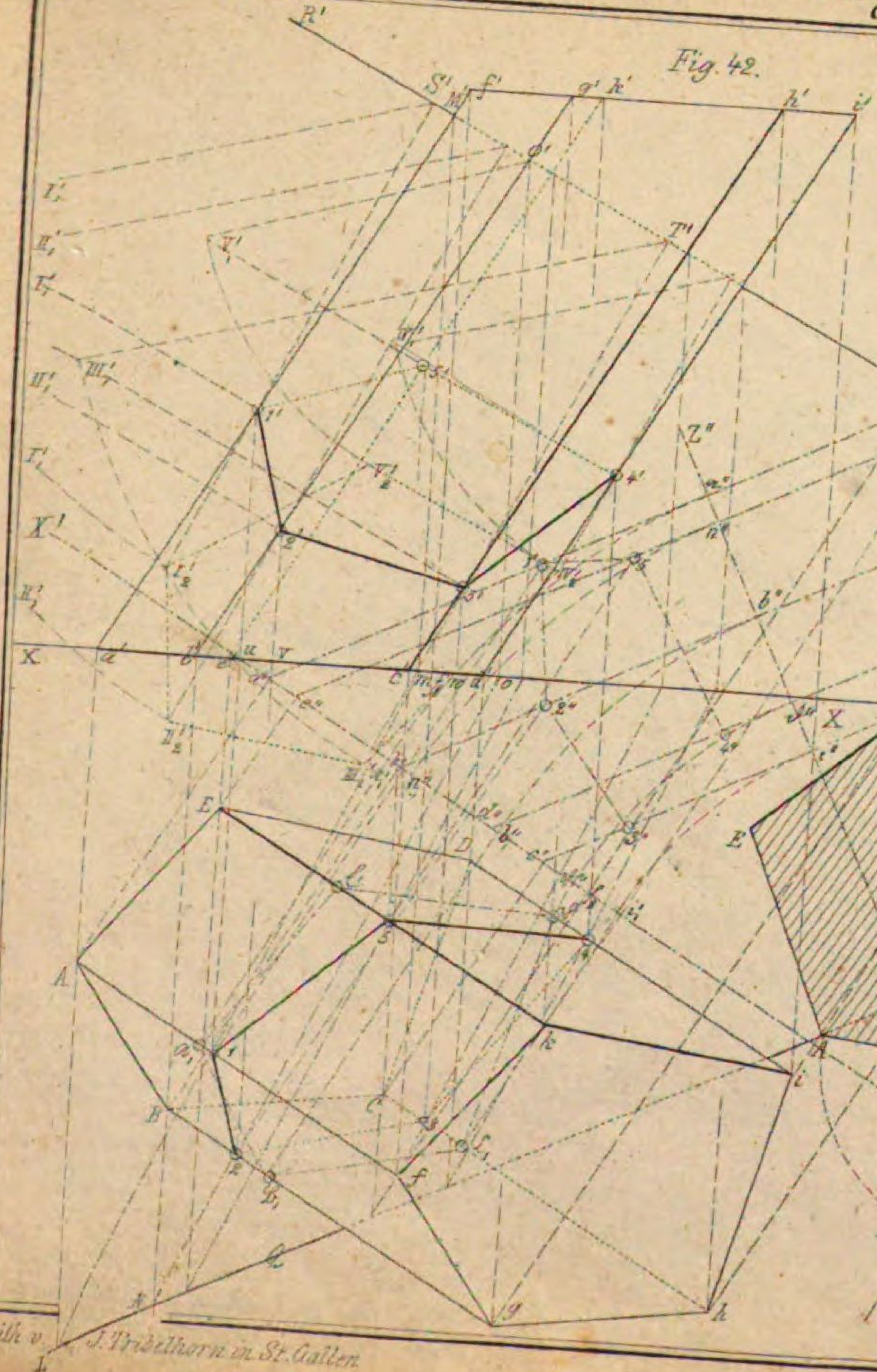
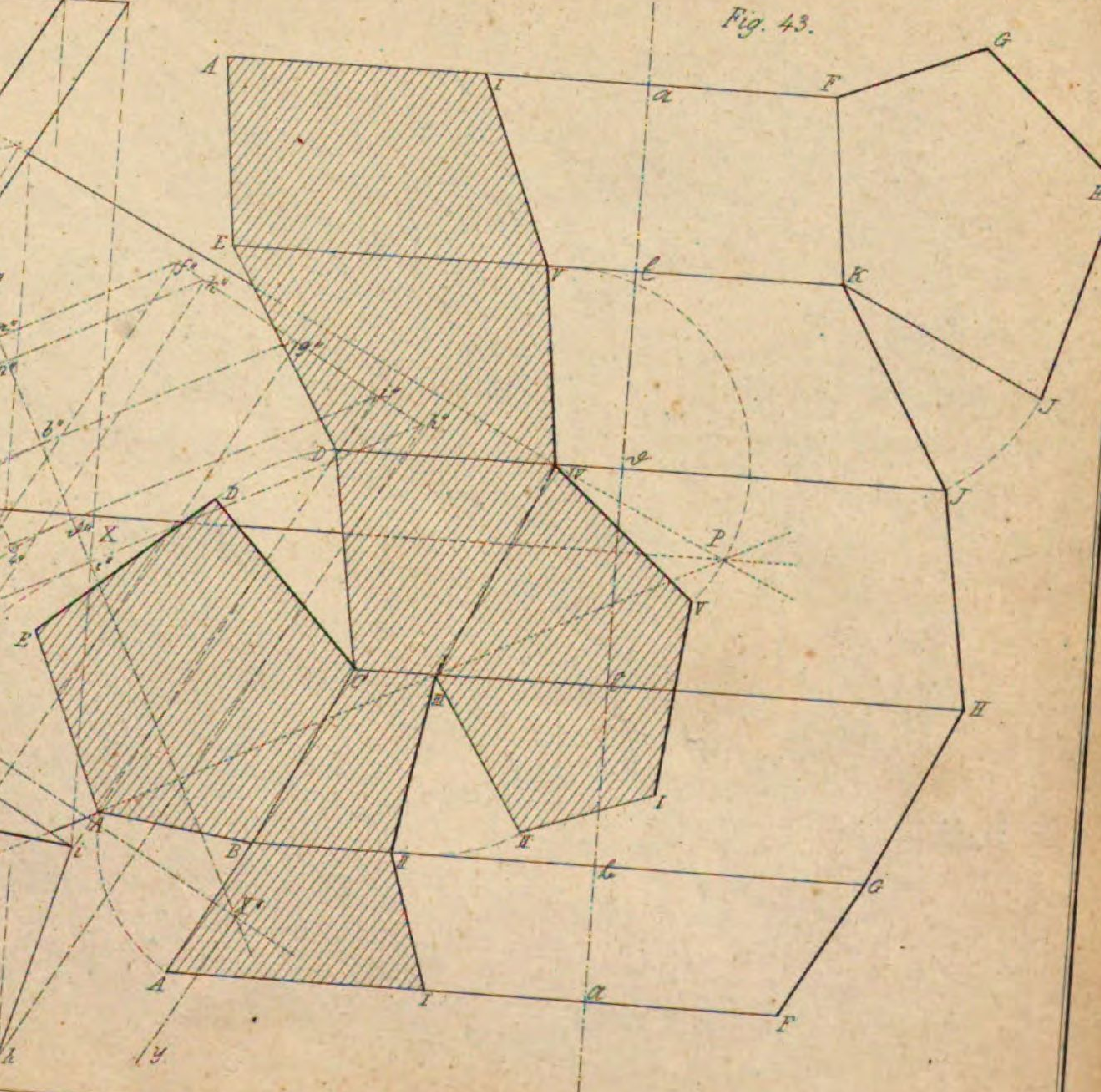


Fig. 43.

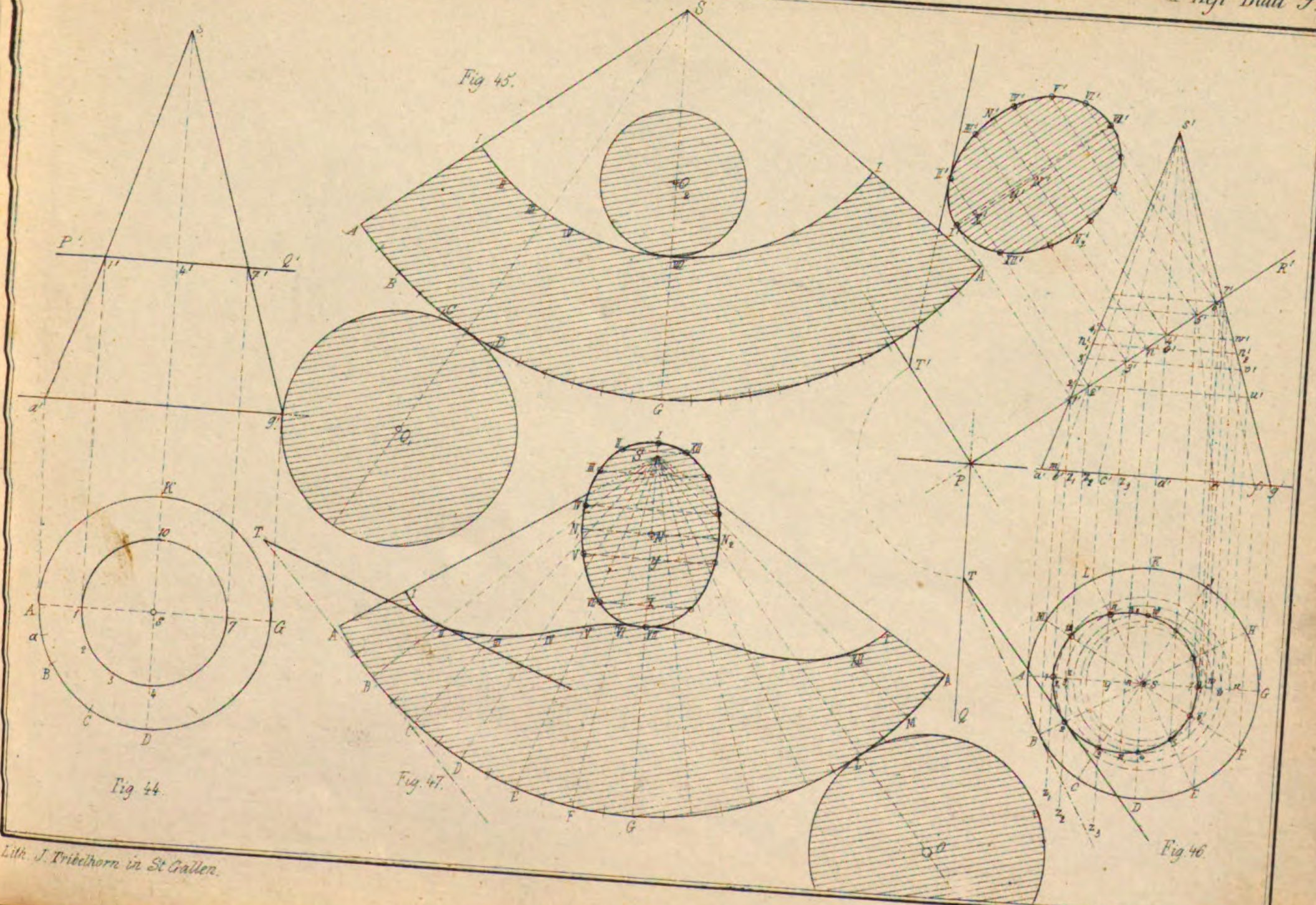


Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen.

Gez. v. G. Delabar

# Projectives Zeichnen.






Lith. J. Tribelhorn in St Gallen.

Gez. v. G. Delabar.


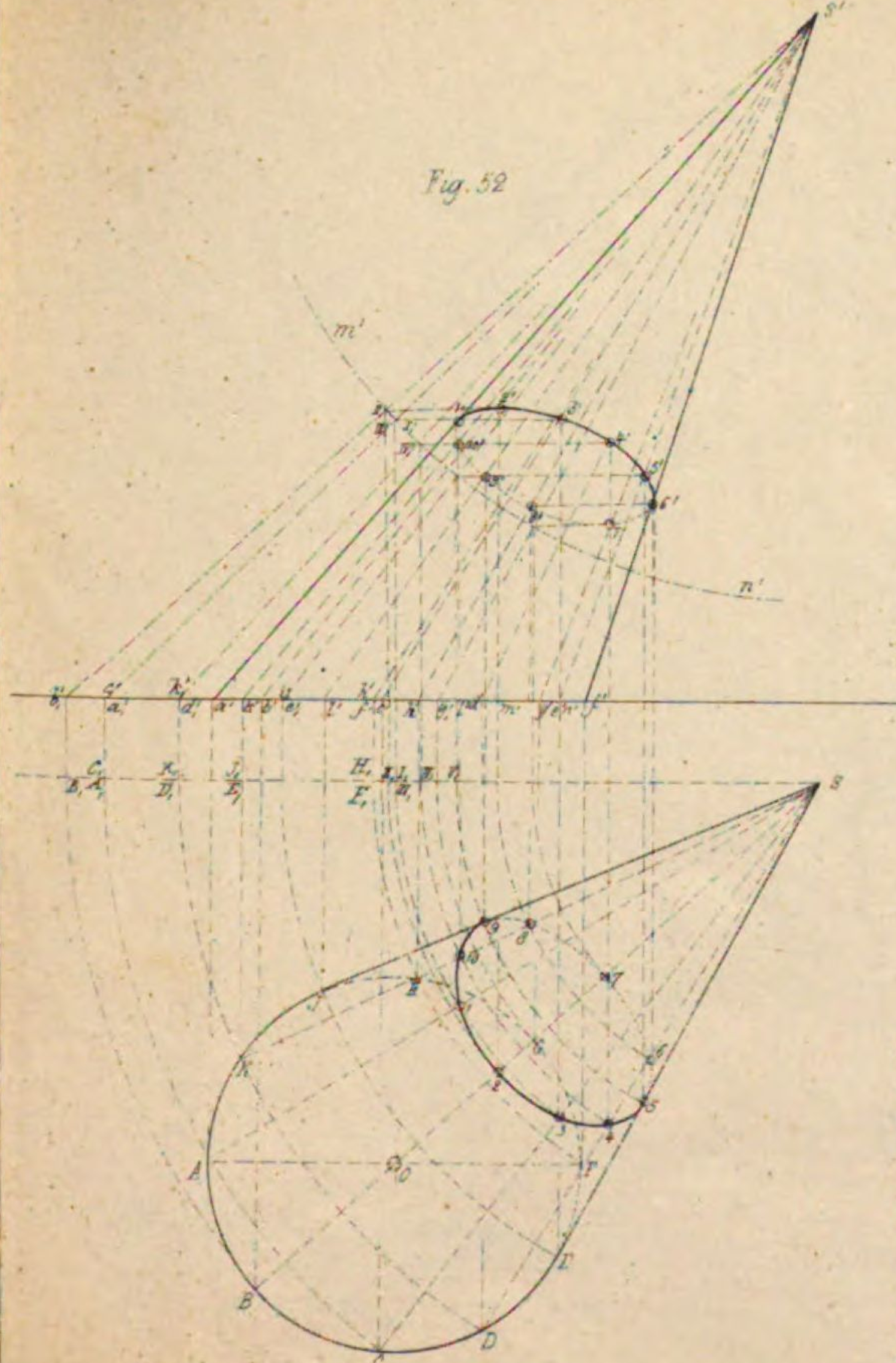
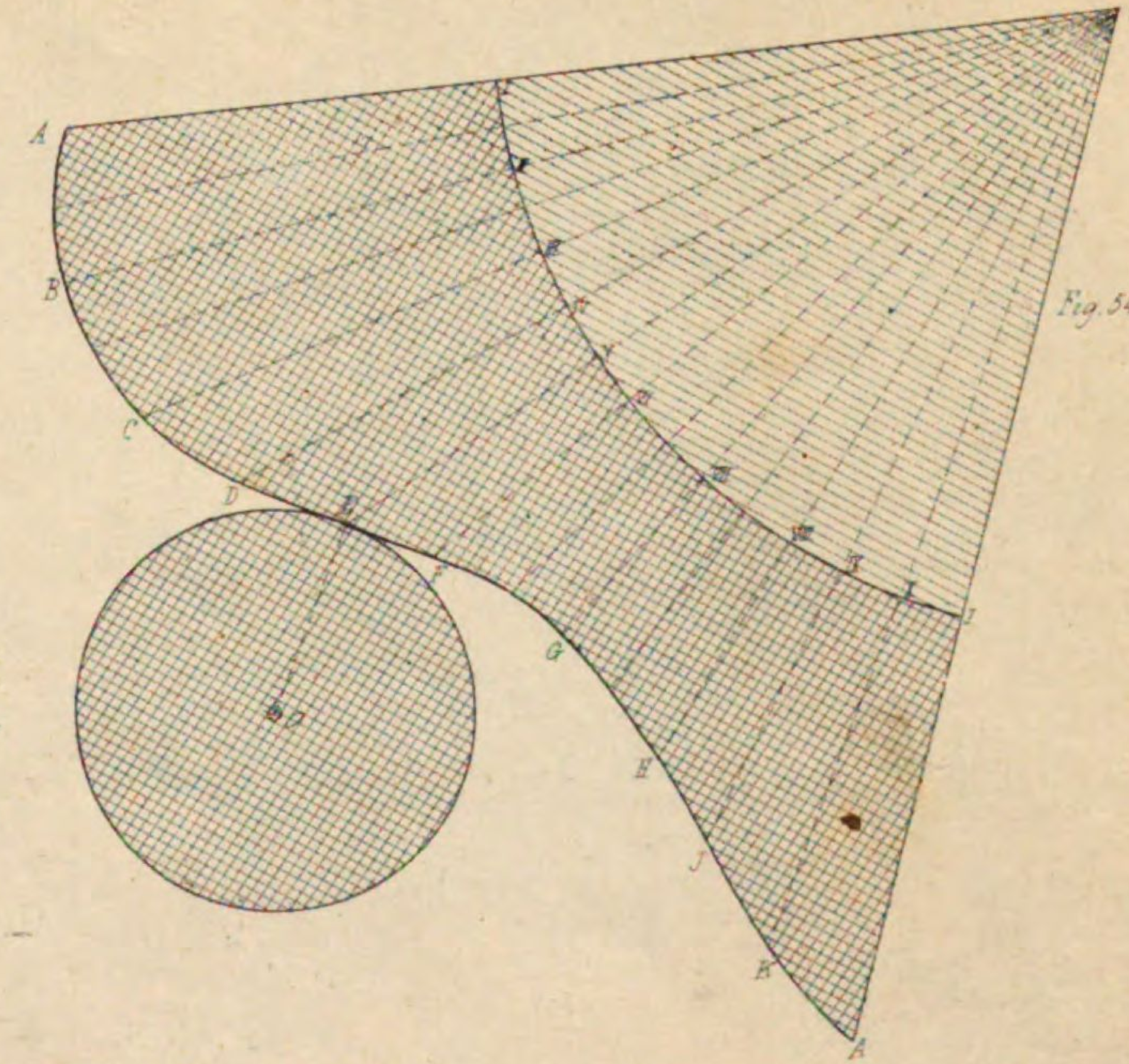
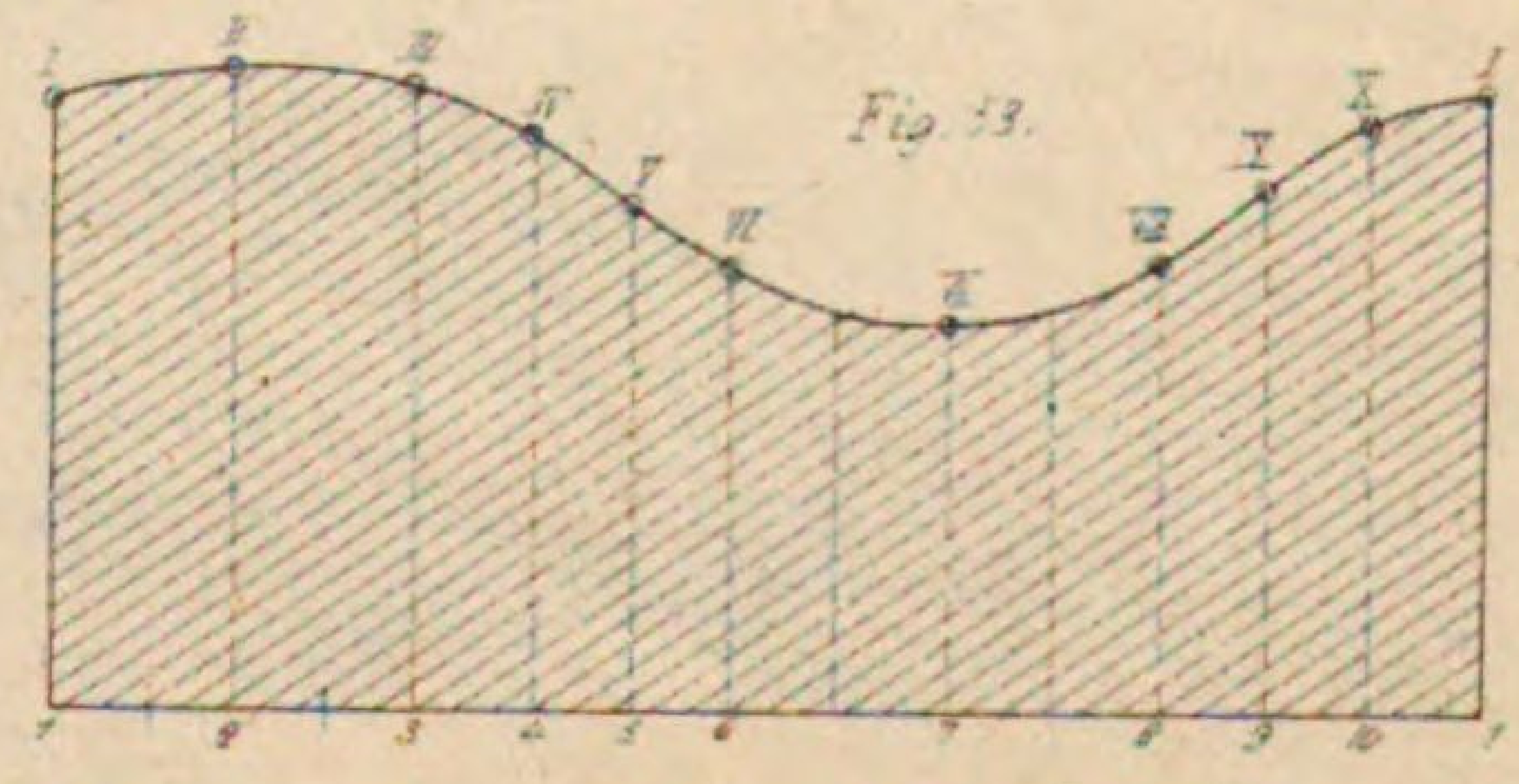


Fig. 48. Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51.

Lith. J. Tribelhorn in St. Gallen Gez. v. G. Delabar

Fig. 52


Fig. 54


Fig. 53

Lith. J. Tribelhorn in St. Gallen

Gez. v. G. Delabar

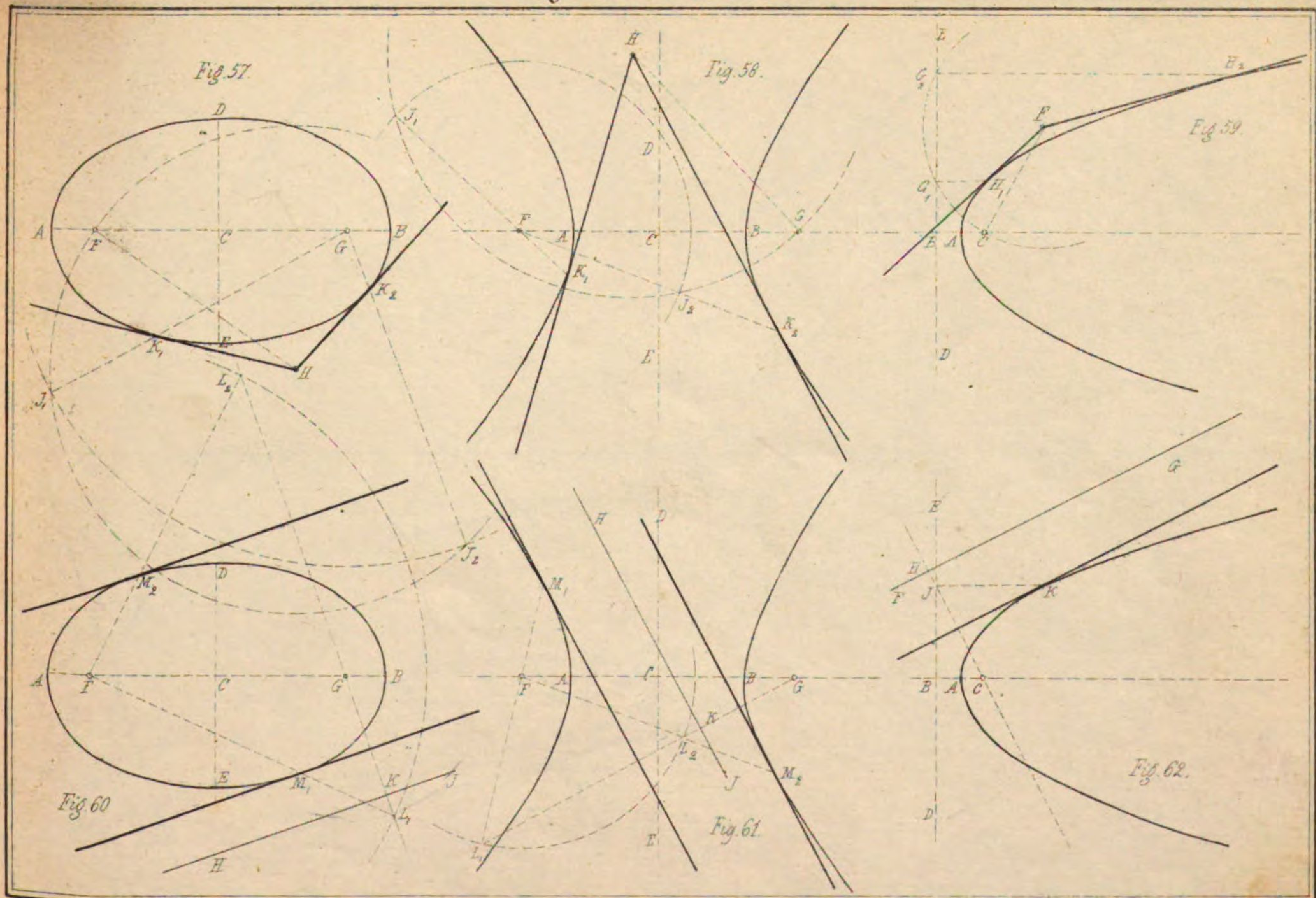



Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen

Gez. v. G. Delabar

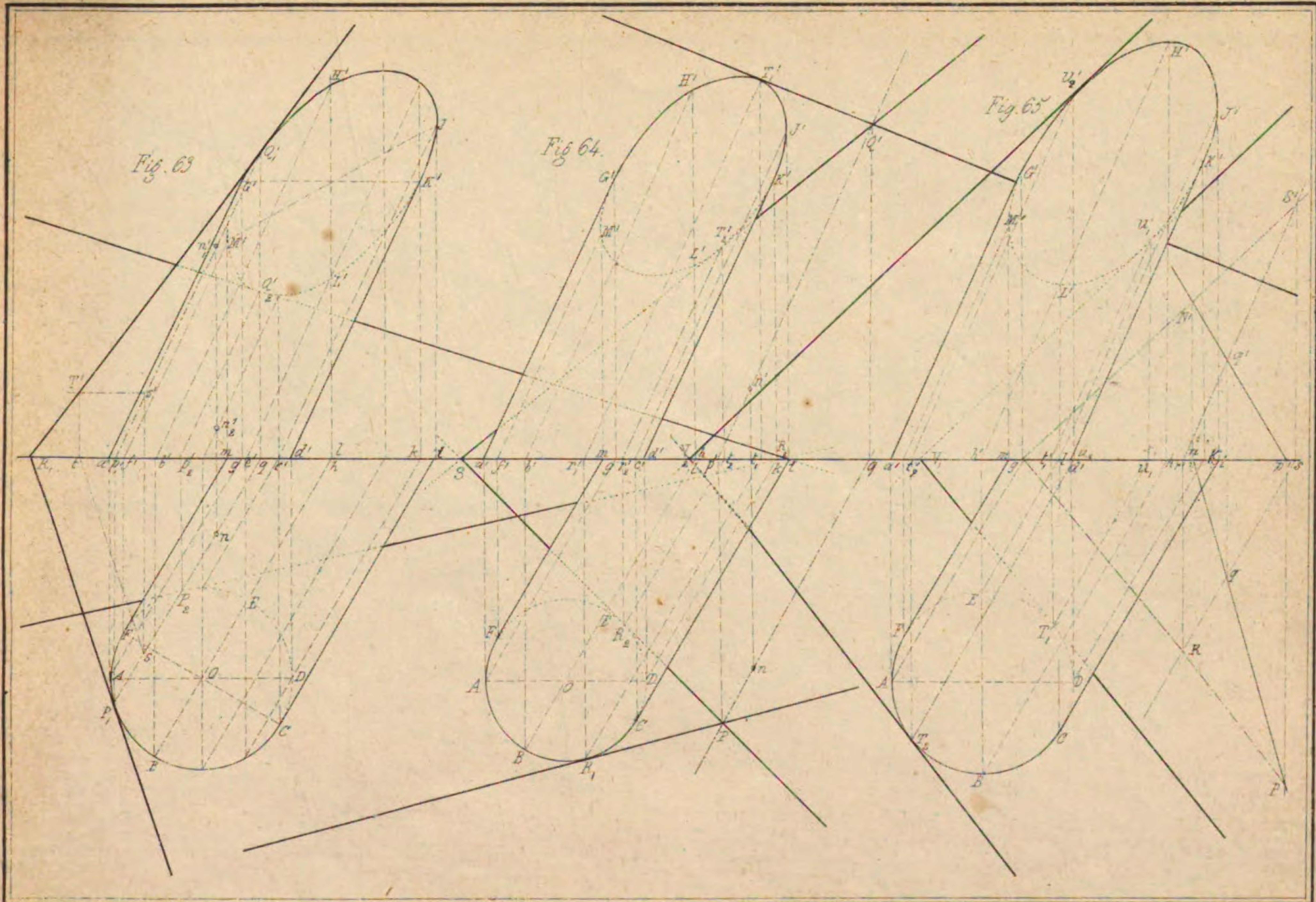
# Projectives Zeichnen.

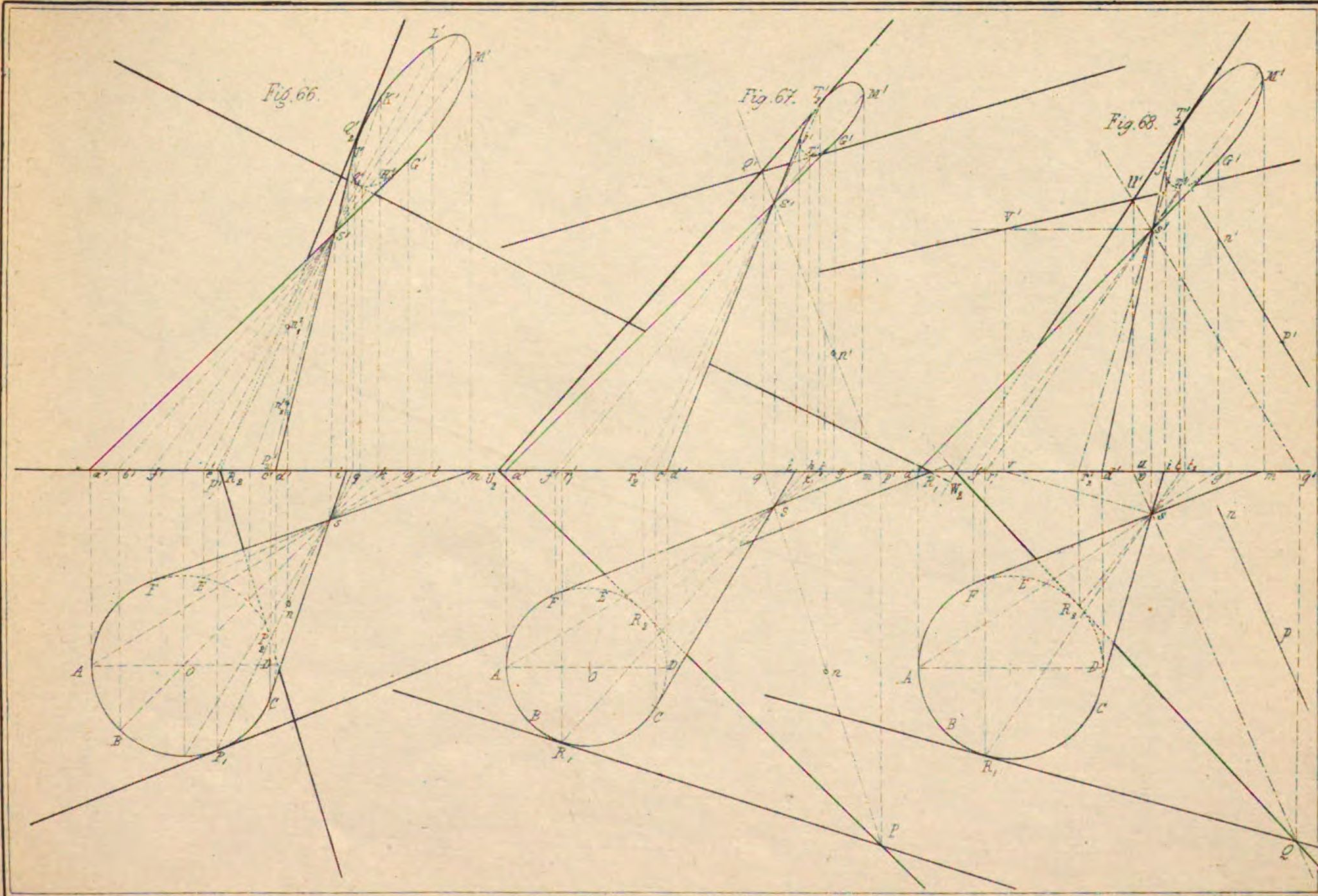





Lith. Anst. J. Tribelhorn.

Gez. v. G. Delabar.


Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65


Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.

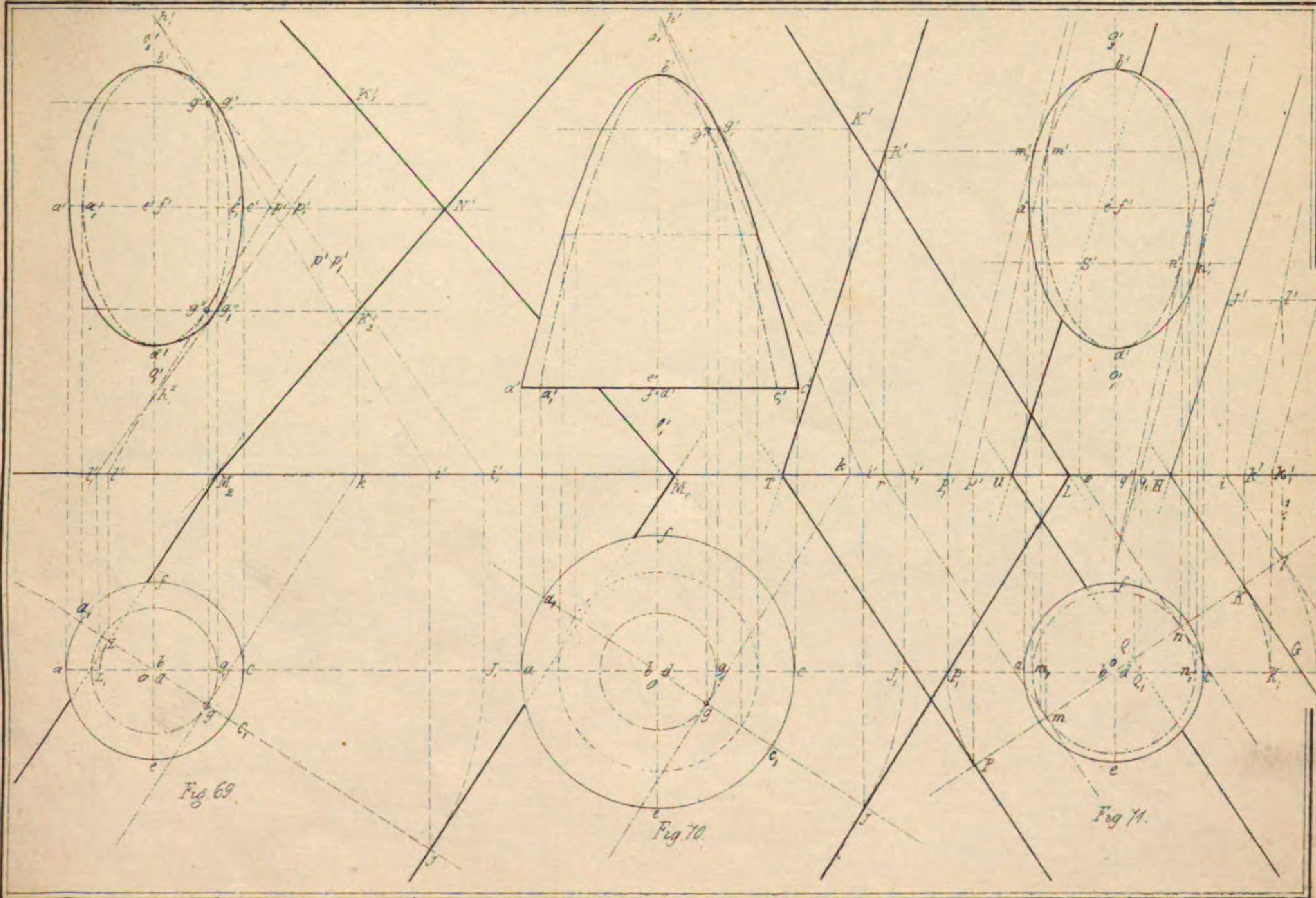


Fig. 69.

Fig. 70.

Fig. 71.

Lith. Anst. J. Tribelhorn.

Gez. v. G. Delabar

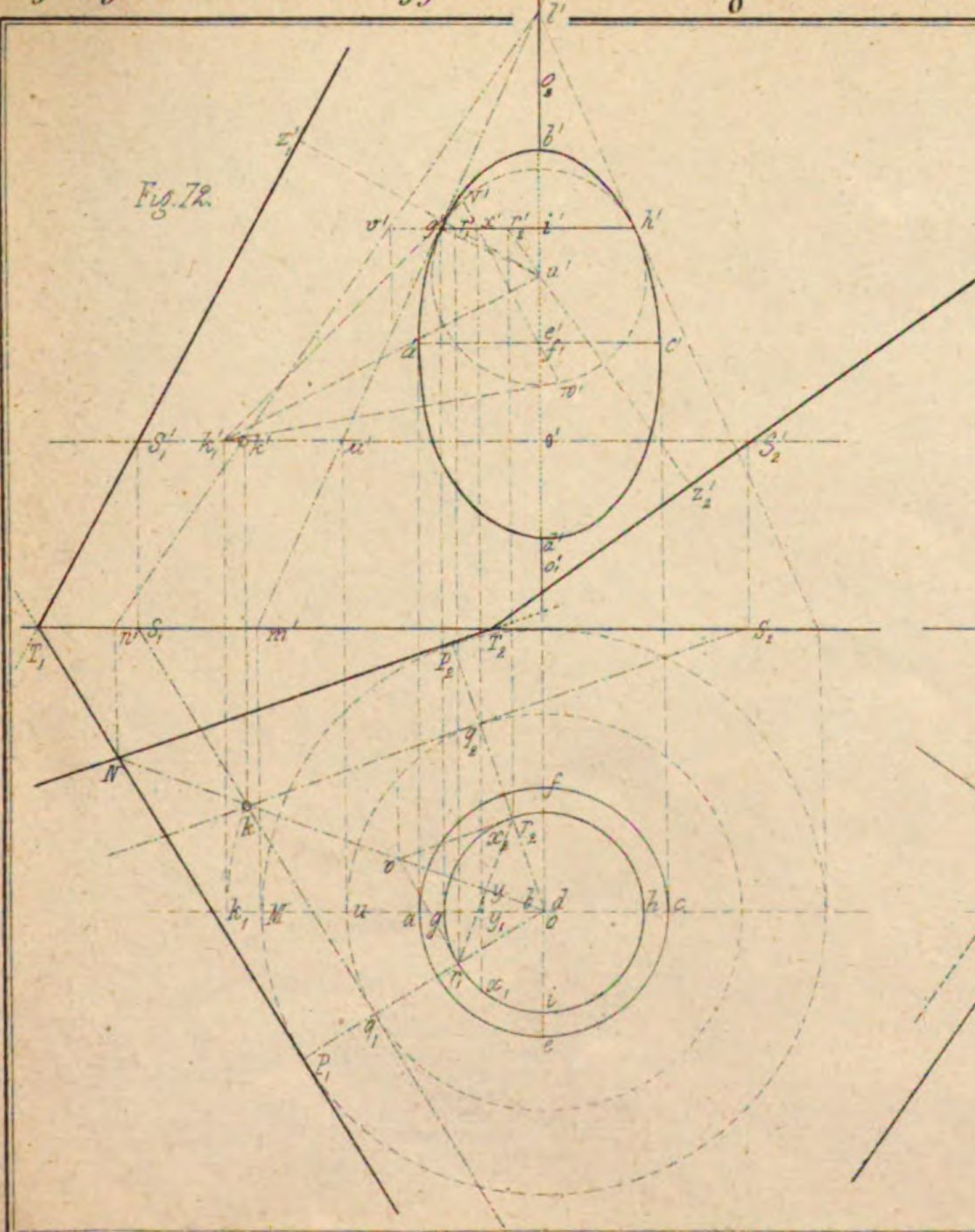


Fig. 72.

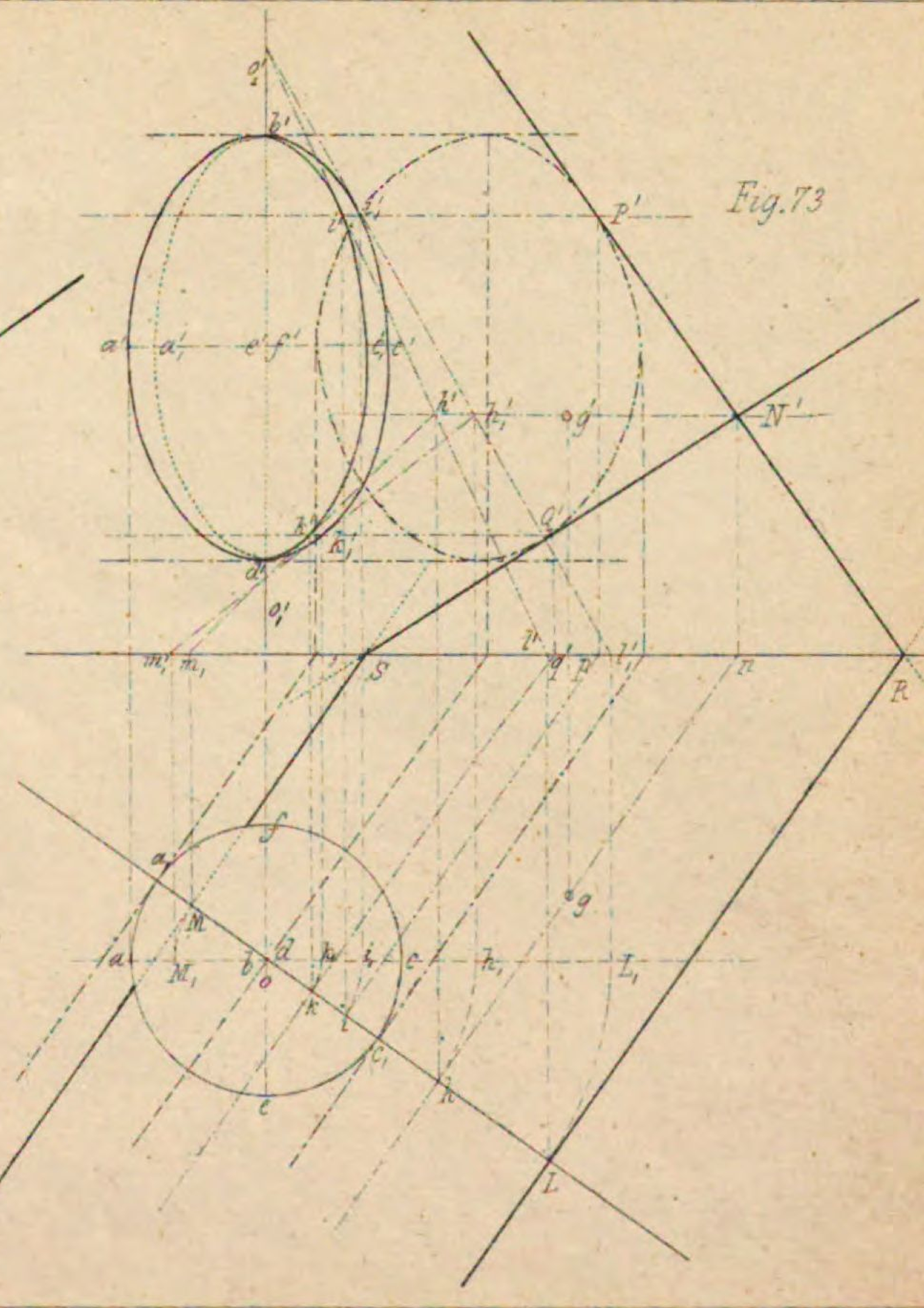
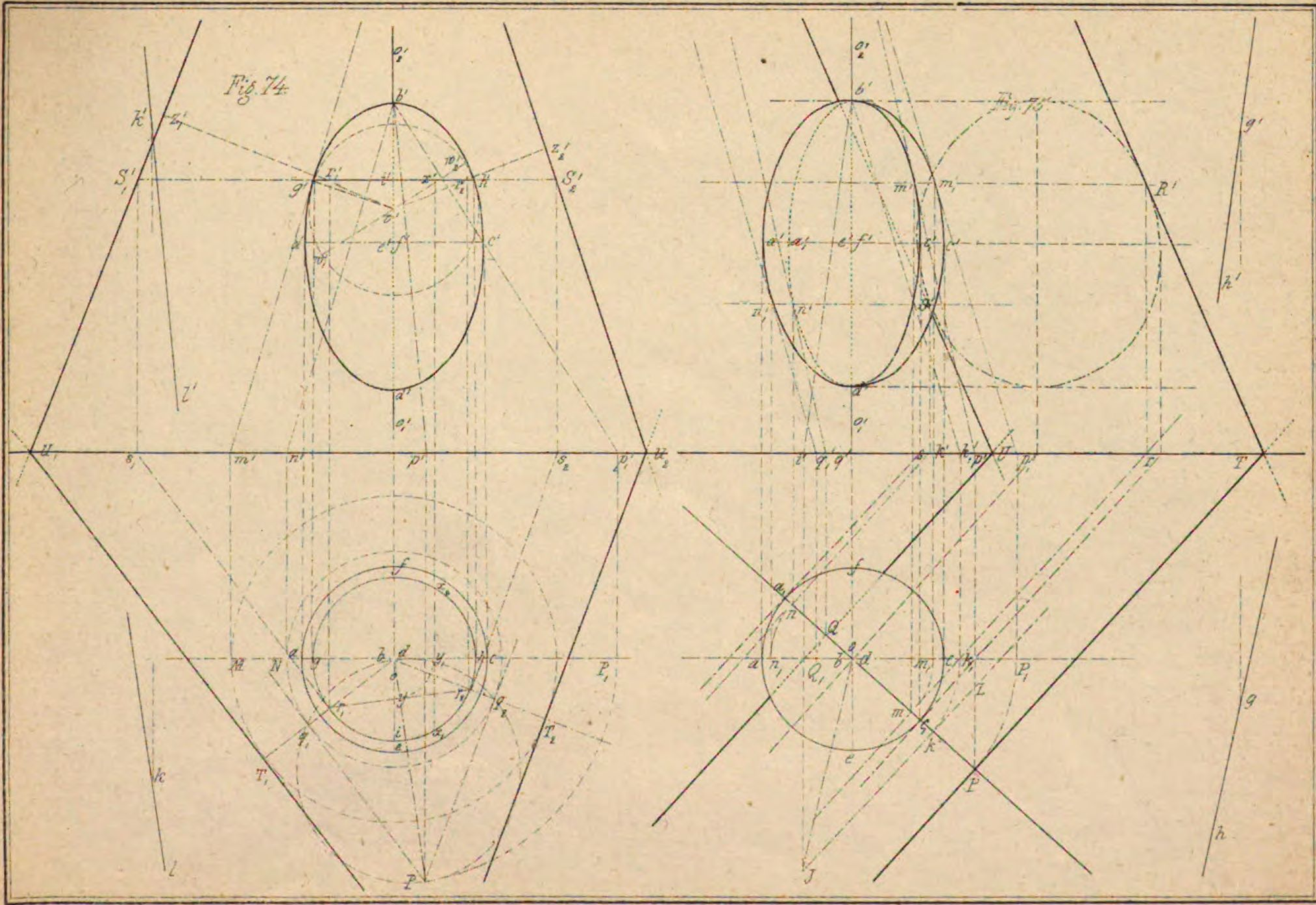


Fig. 73.

Lith. Anst. J. Tribelhorn.   Gez. v. G. Dell.




*Lith. Anst. J. Tribelhorn.* *Gez. v. G. Delal*

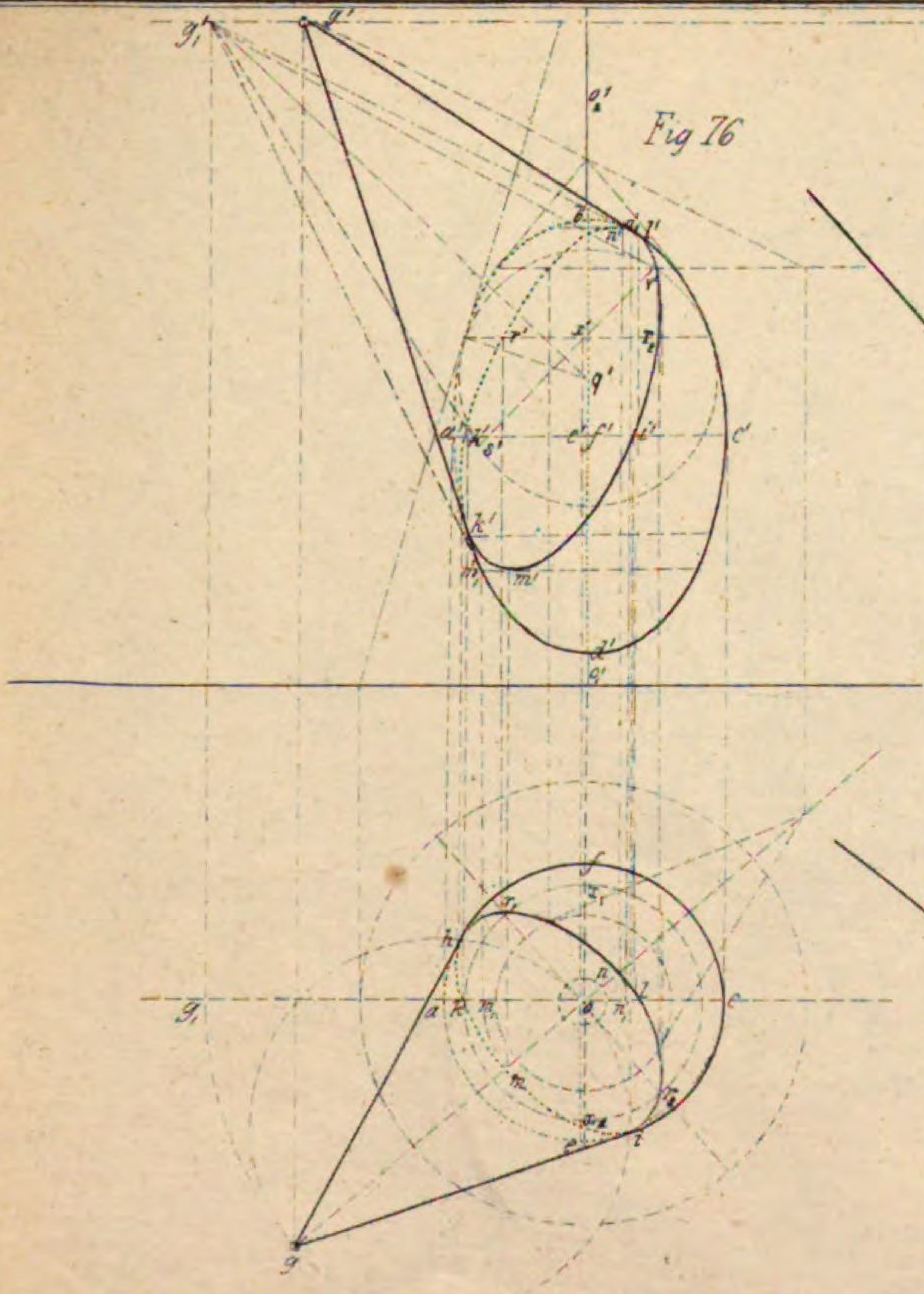


Fig 76

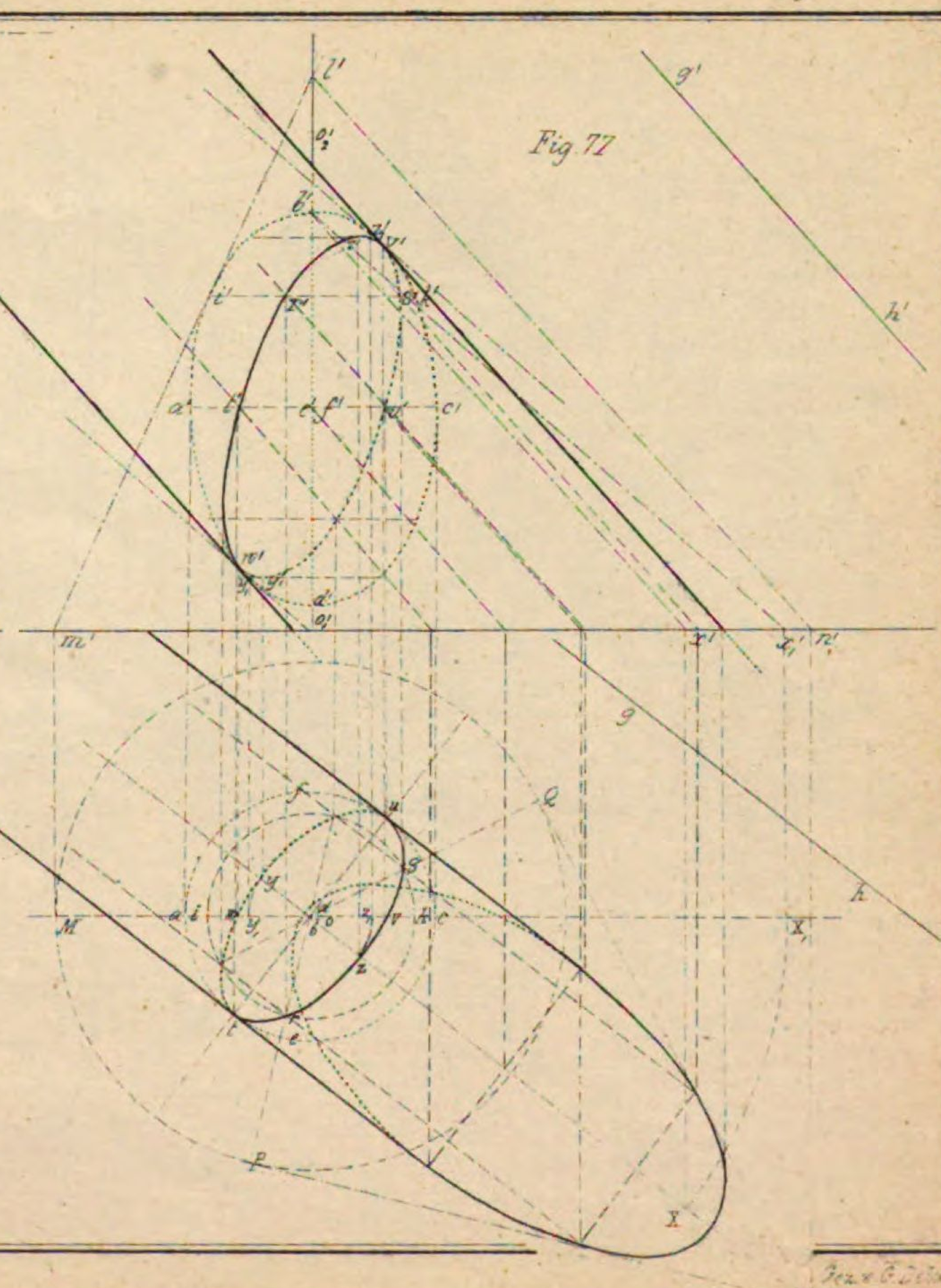


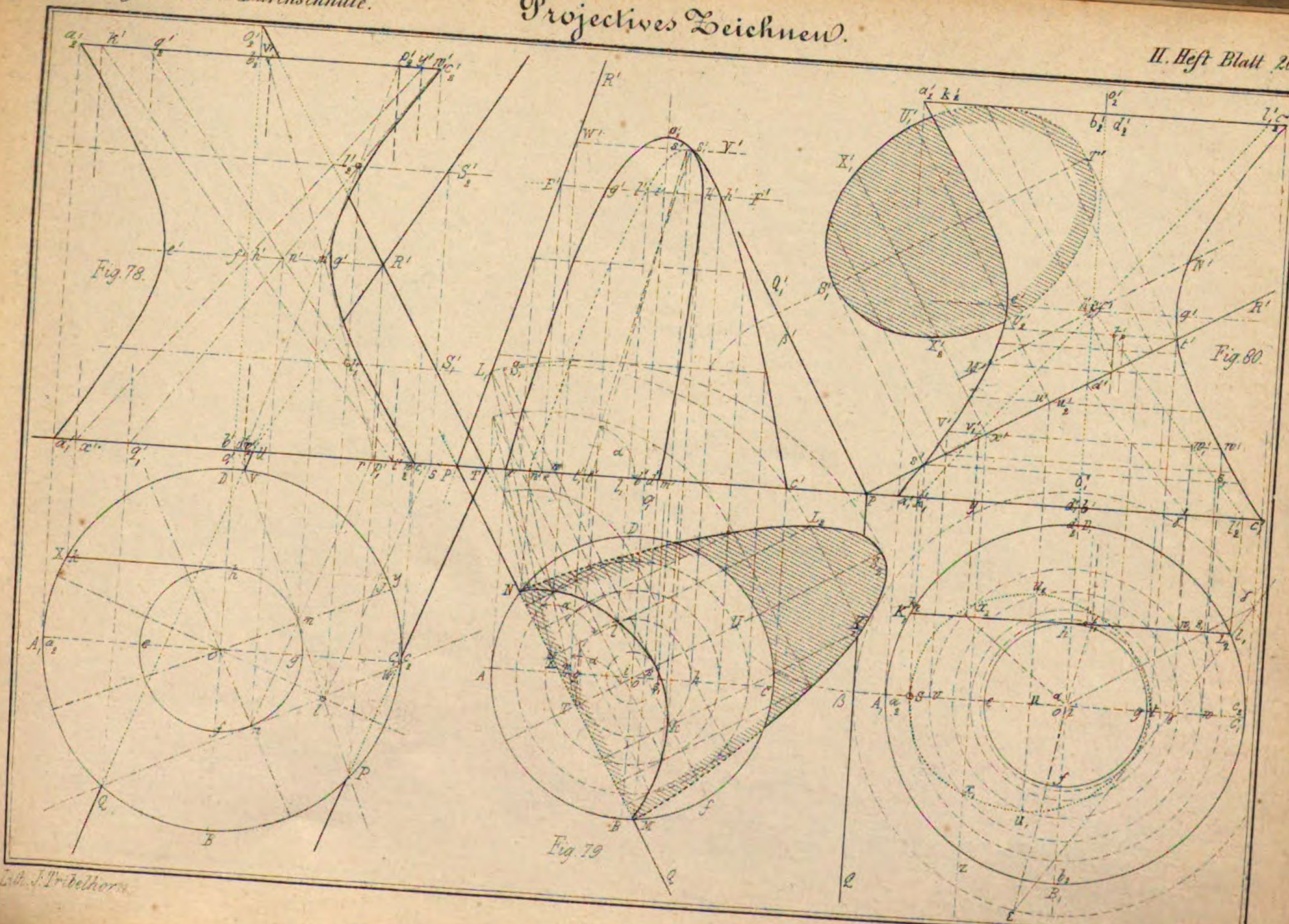
Fig. 77

Lith. Anst. J. Tribelhorn

Gez. v. G. [illegible]

# Projectives Zeichnen.






Lith. J. Tribelhorn.

Gez. v. G. Delabar.

# Projectives Zeichnen.



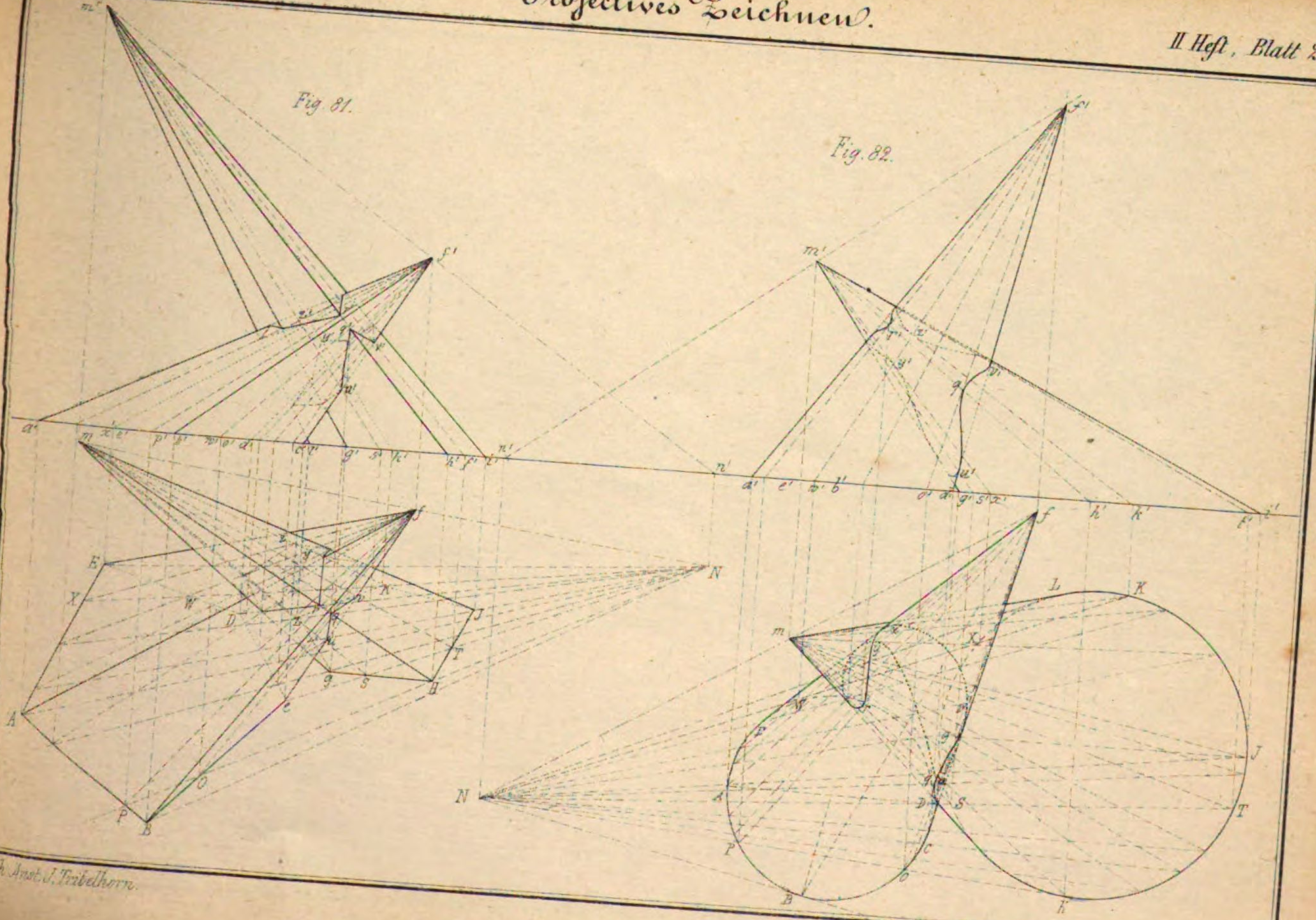


Fig. 81.

Fig. 82.

Lith. Anst. J. Tribelhorn.

Gez. v. G. Delabar.

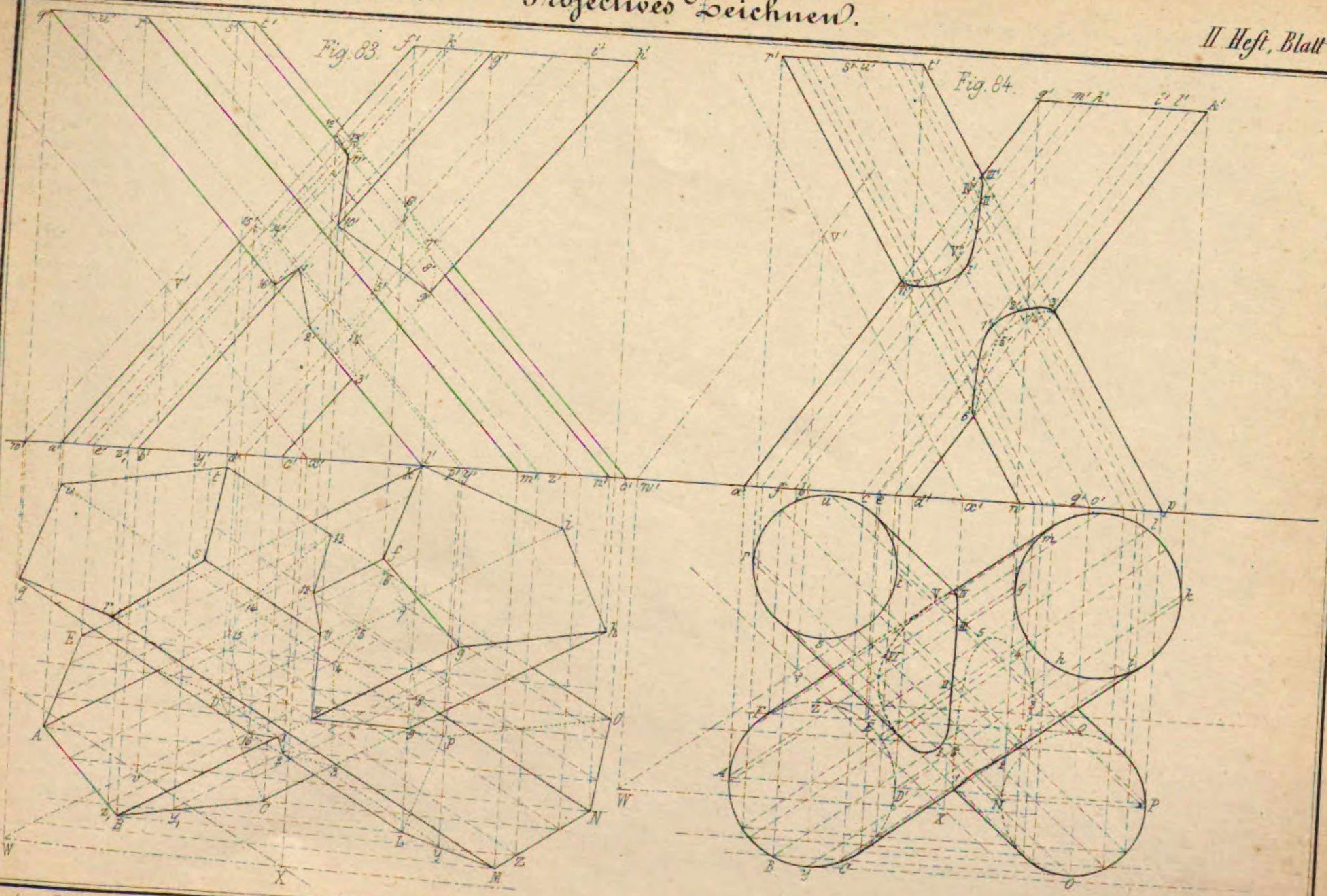


Fig. 83. Fig. 84.

Lith. Anst. J. Tribelhorn

Gez. v. Gr. Delab

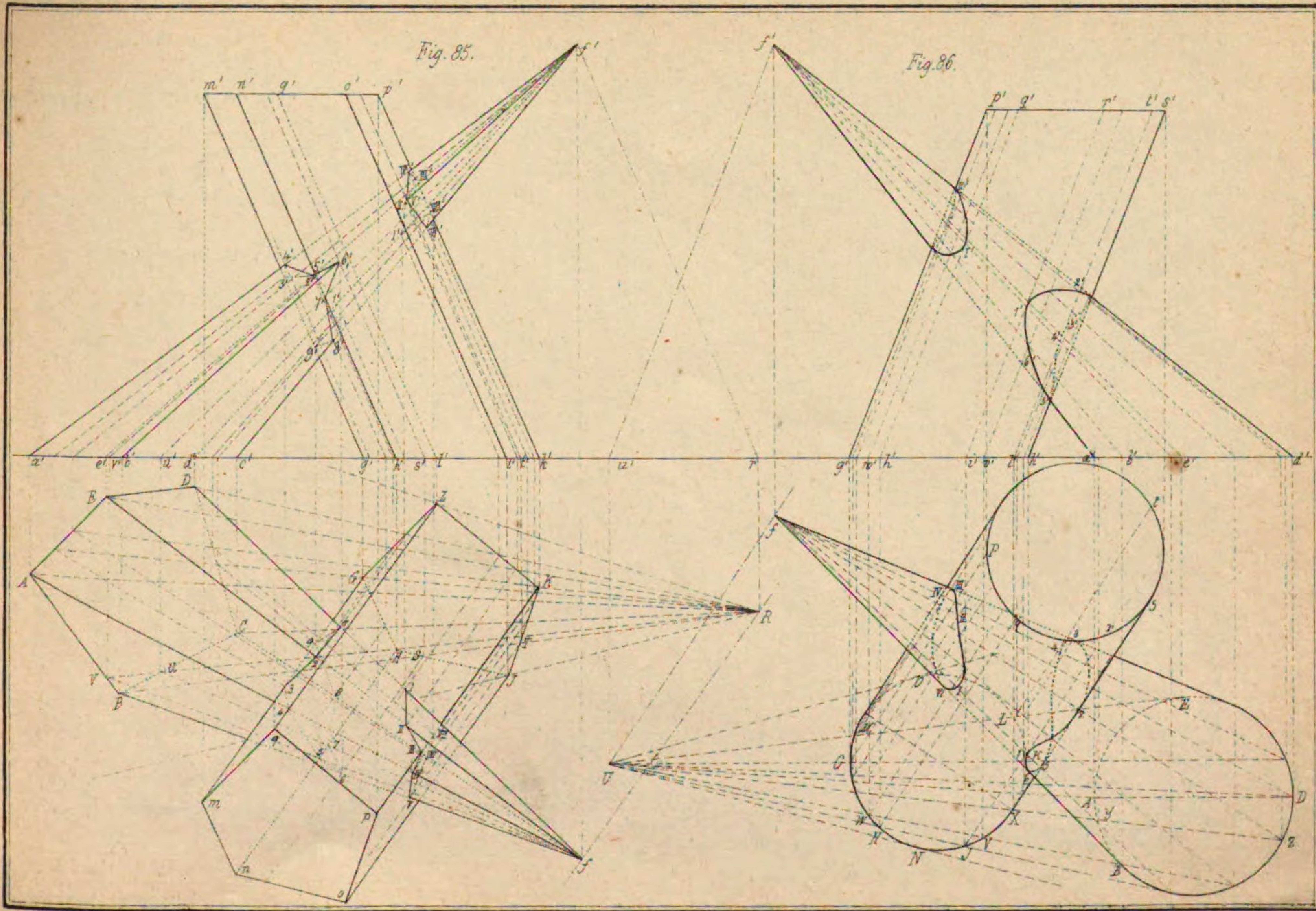


Fig. 85. Fig. 86.

Lith. Anst. J. Tribelhorn Gez. v. Gr. Delabar

Fig. 87

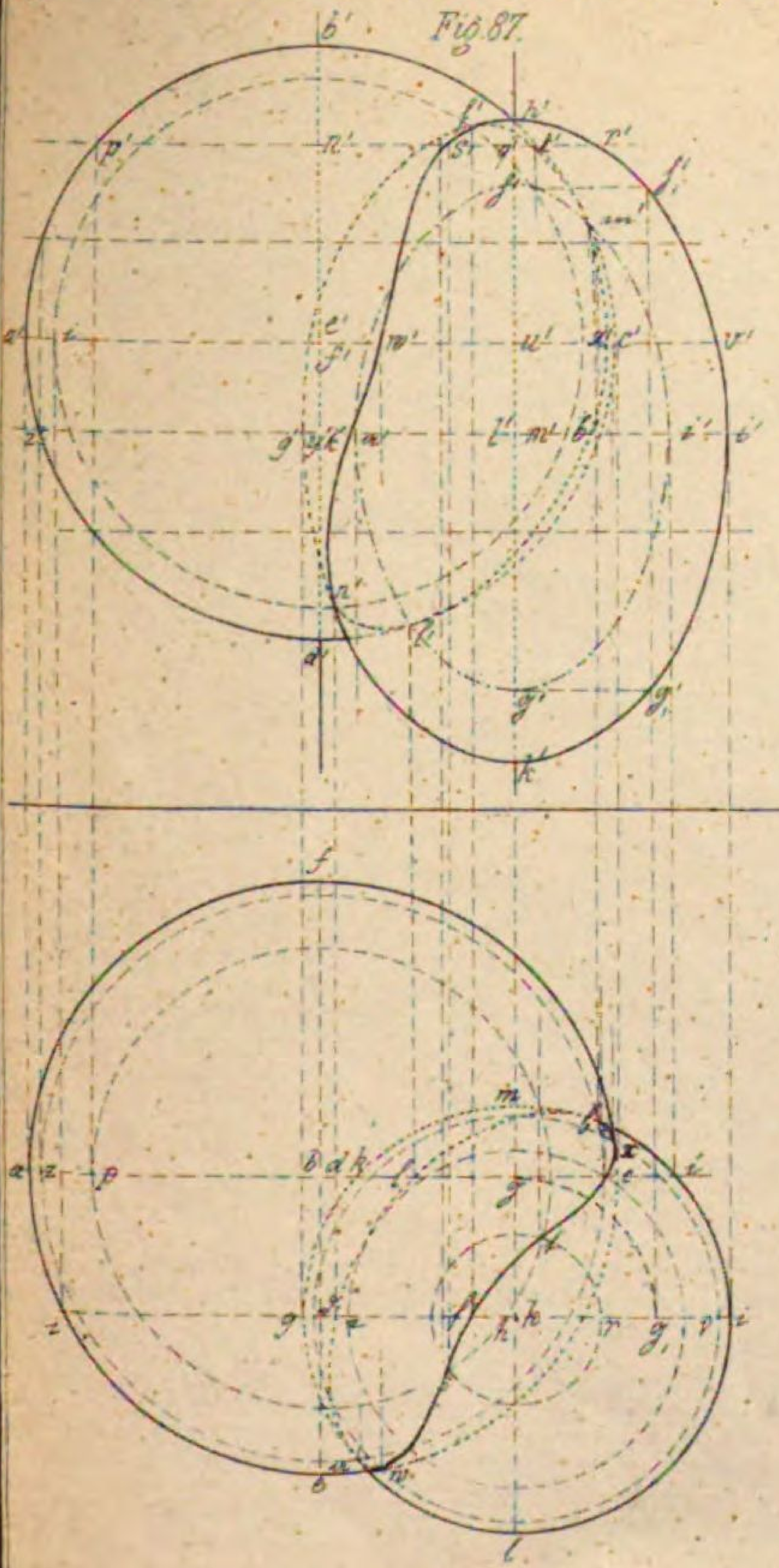


Fig. 88

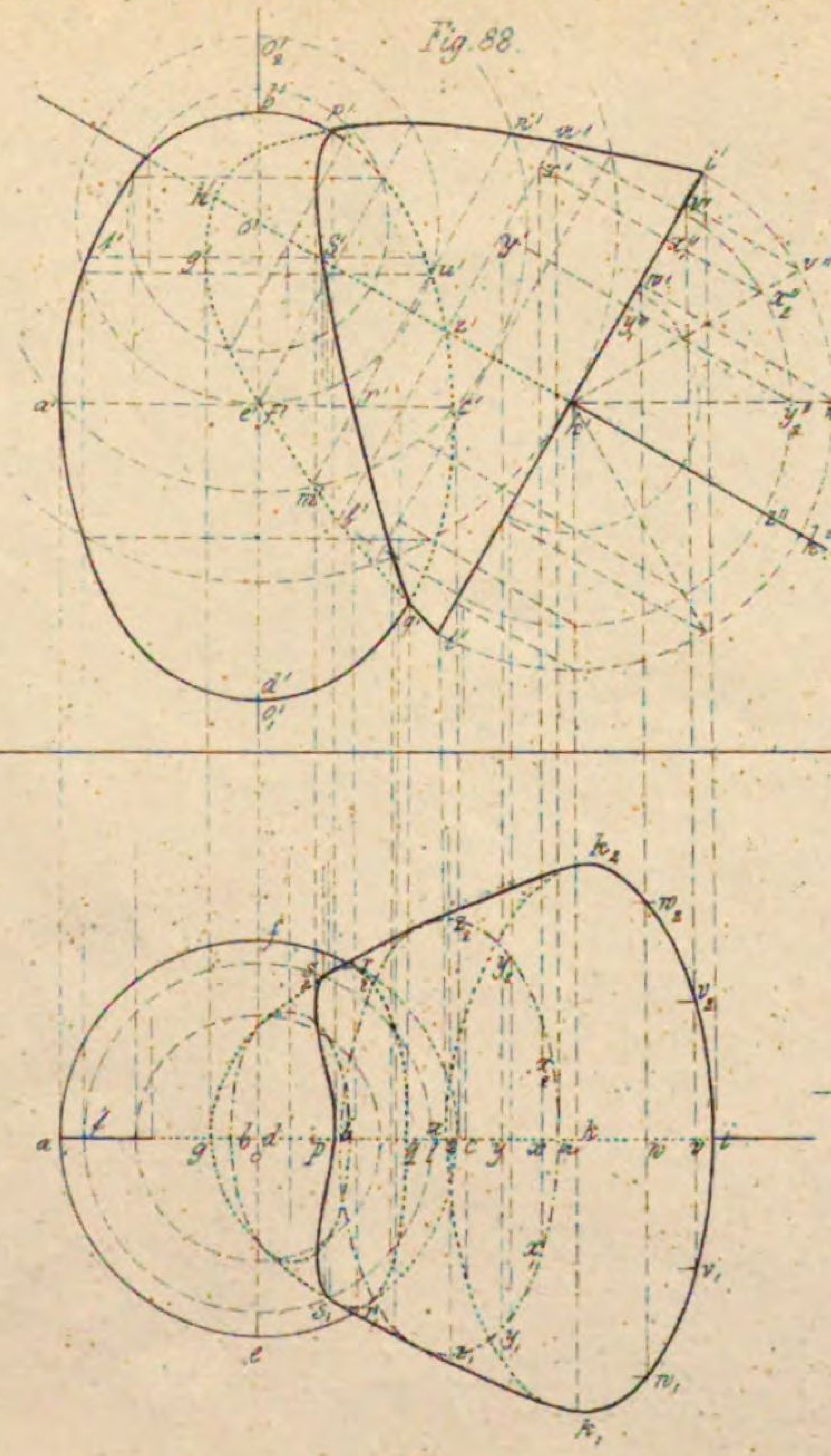
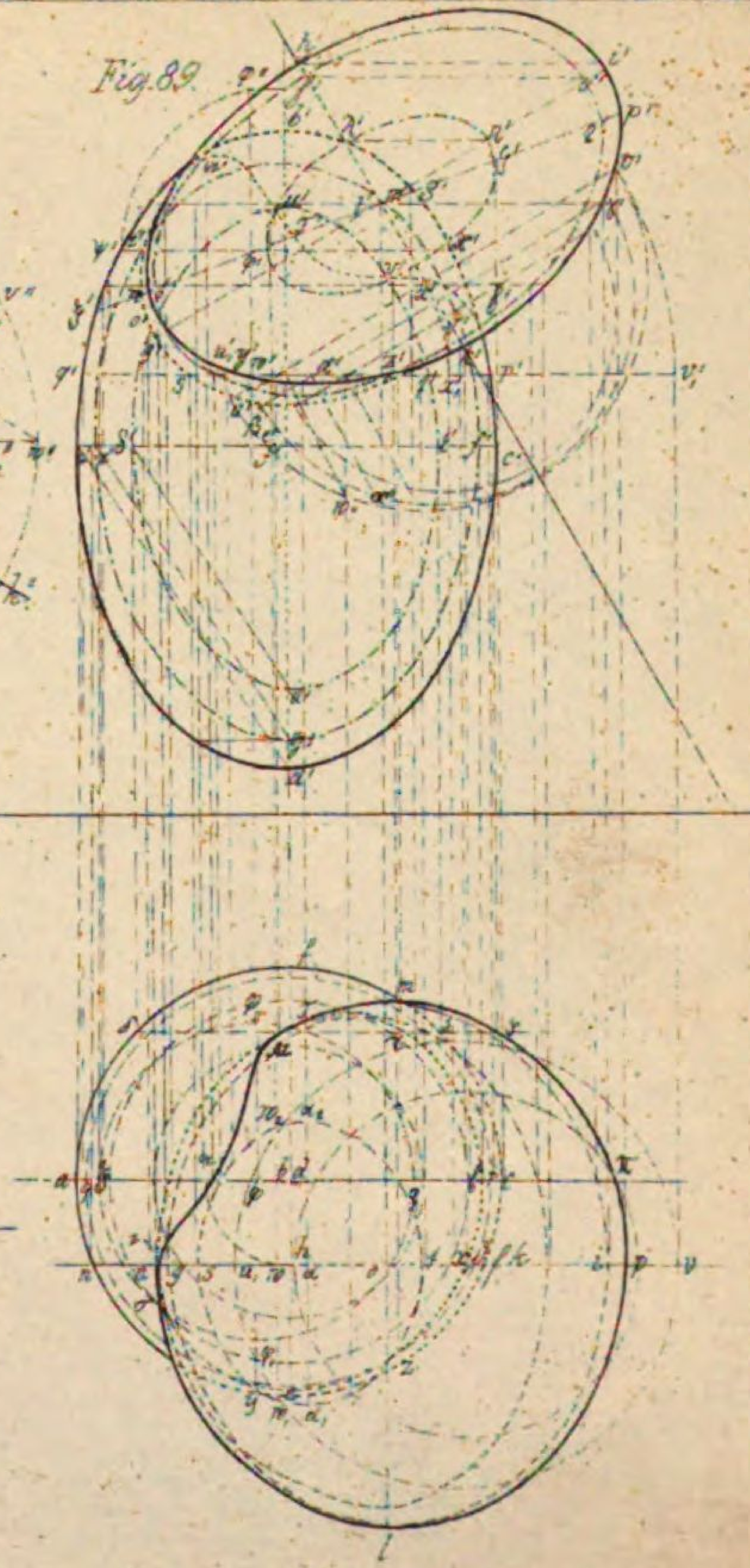
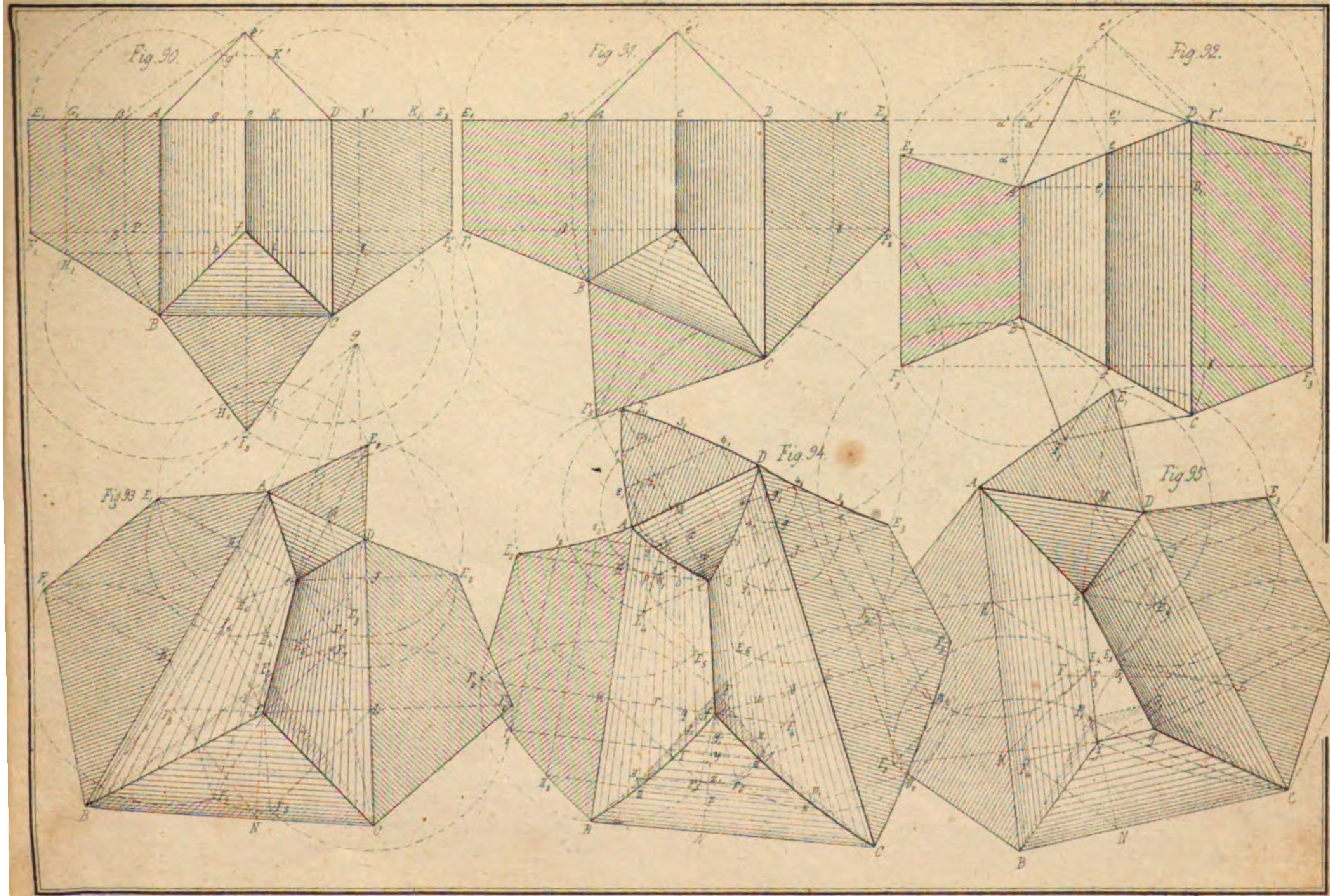


Fig. 89

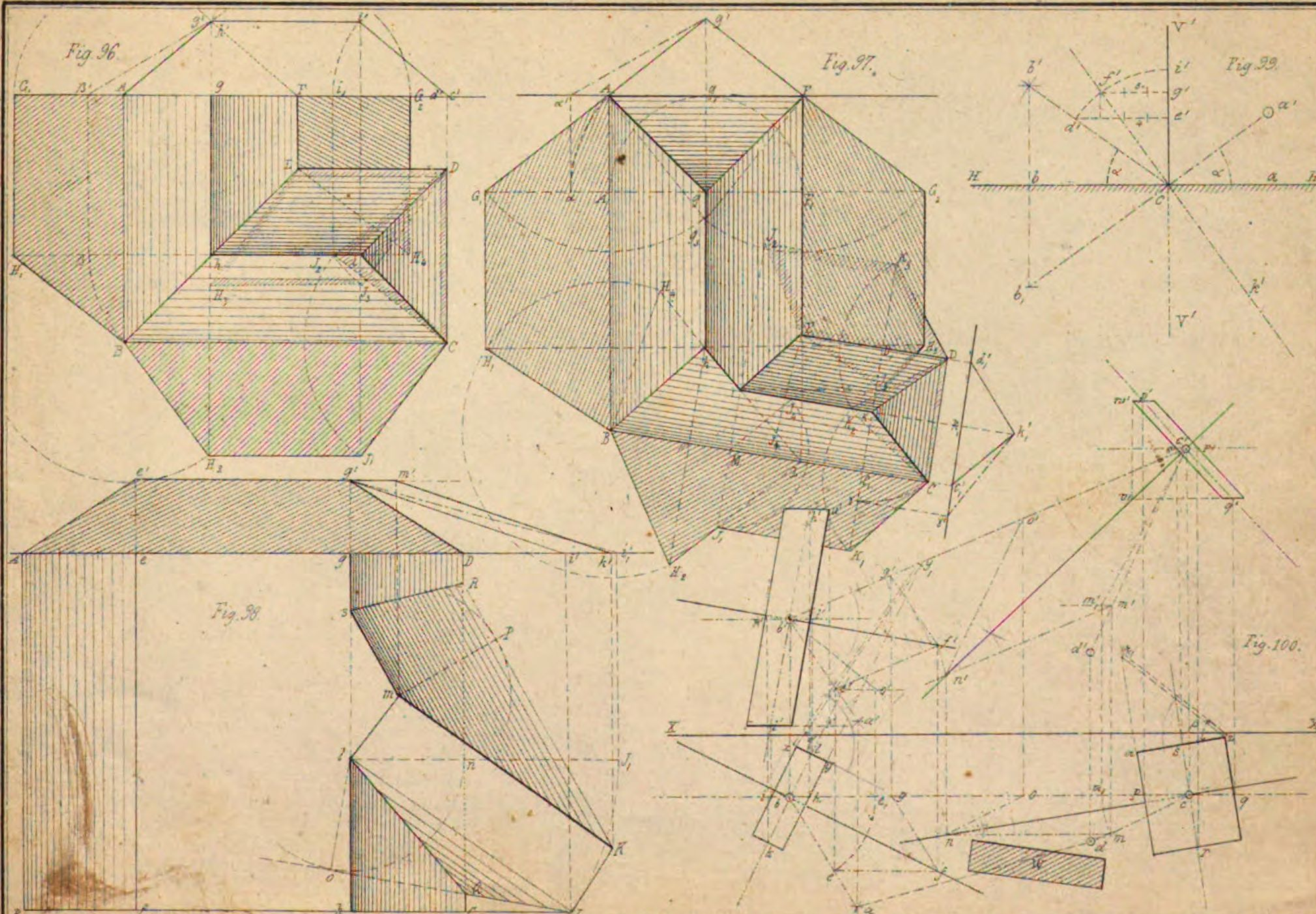


Lith. Anst. J. Tribelhorn. Gez. v. G. Delabar.

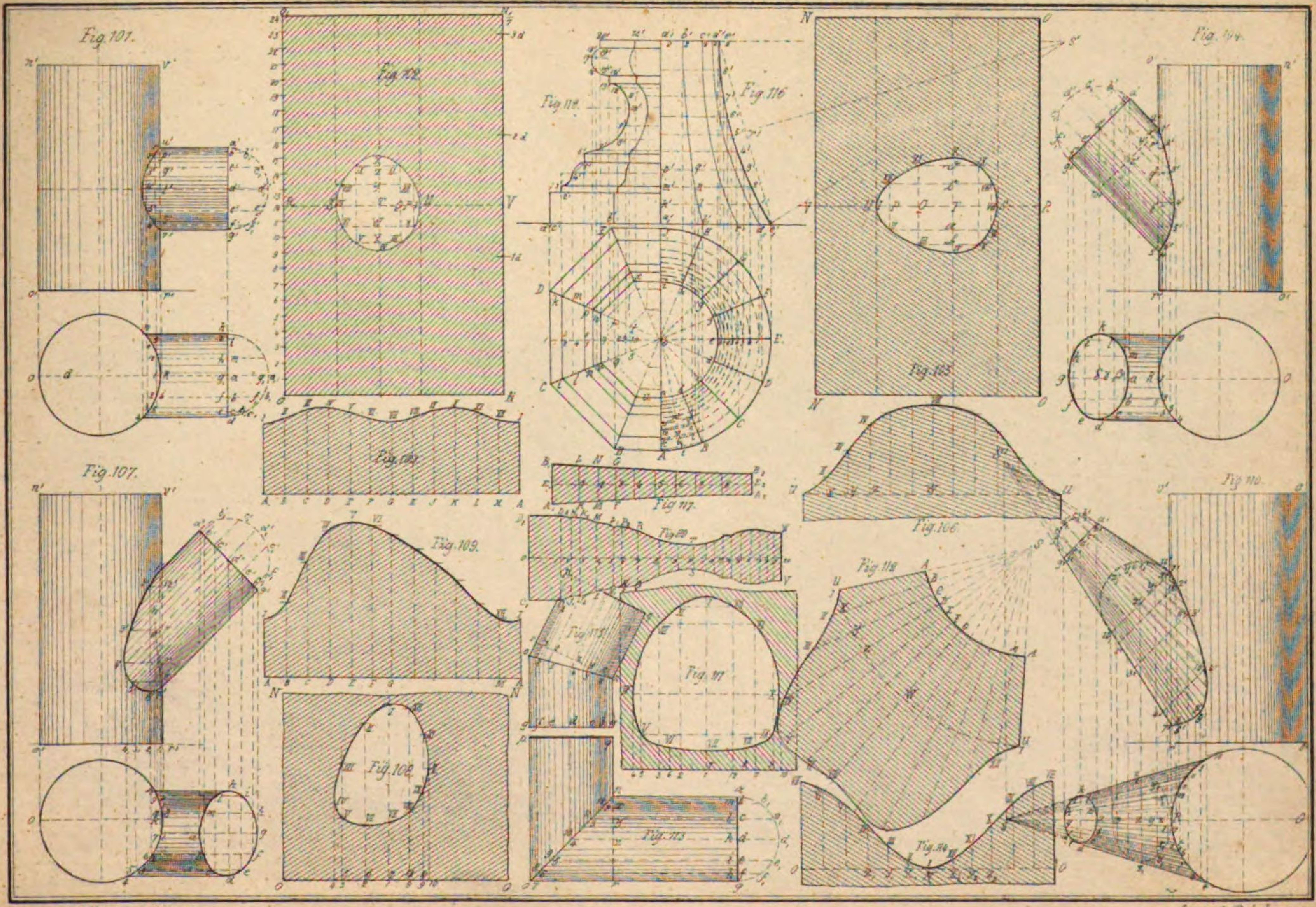

Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95

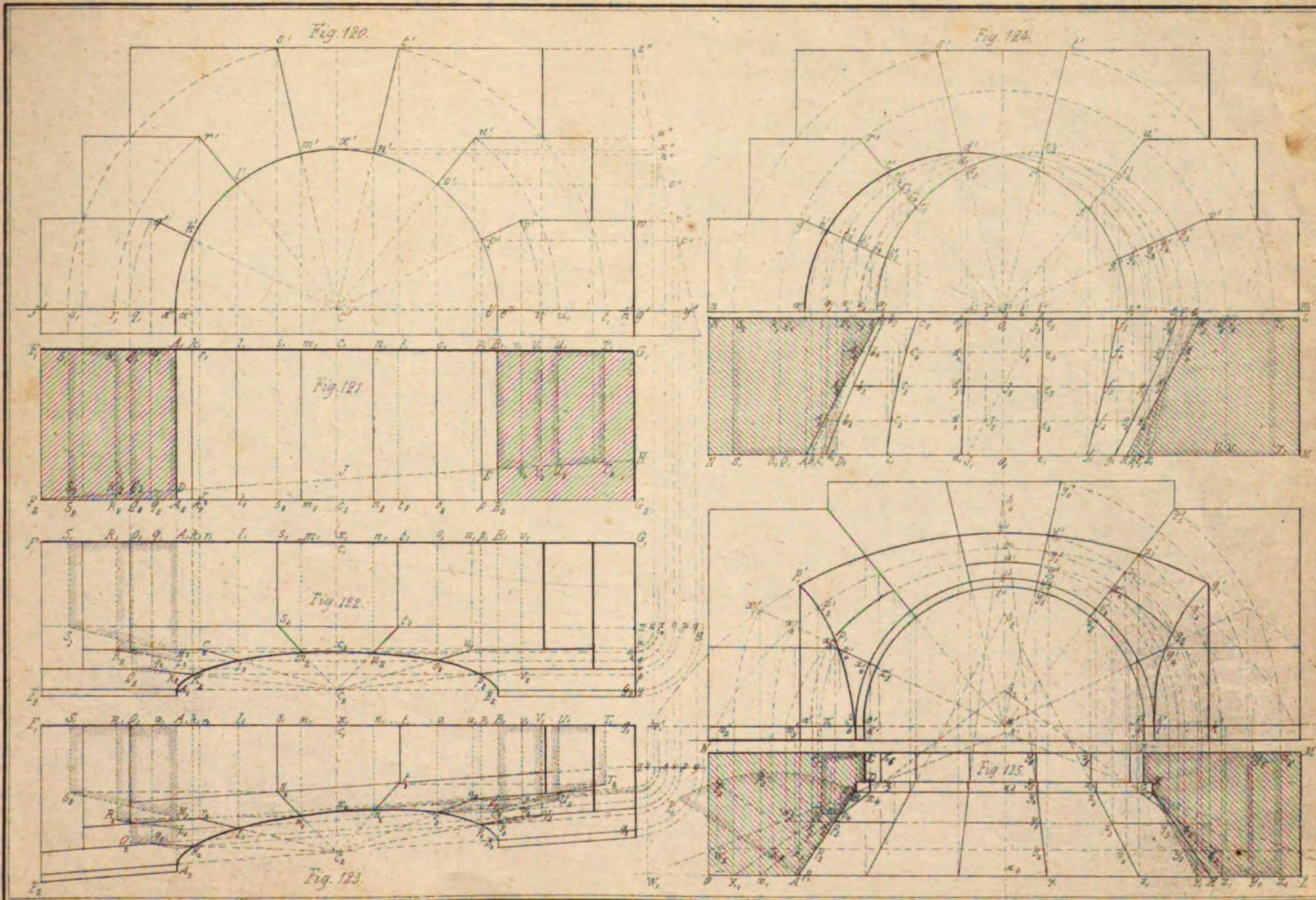
# Projectives Zeichnen.






Lith. v. J. Tribelhorn in St. Gallen. Gez. v. G. Delab.


Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.


Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.

Diese „Anleitung zum Linearzeichnen" wird in 12 Heften das geometrische Zeichnen, das projektive Zeichnen und das gewerbliche und technische Zeichnen enthalten.

Die Eintheilung ist folgende:

I. Theil:

1. Heft: **Das geometrische Zeichnen.**

II. Theil: **Das projektive Zeichnen.**

2. Heft: Die Elemente der darstellenden Geometrie.
3. „ Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart.
4. „ Die Polar- und Parallelperspektive.
5. „ Die Schattenlehre.

III. Theil: **Das gewerbliche und technische Zeichnen.**

A. Bauzeichnen:

6. Heft: Die Säulenordnungen, Grund- und Aufrisse ganzer Gebäude 2c.
7. „ Die einfachen und zusammengesetzten Holz-, Eisen- und Steinkonstruktionen.
8. „ Die Schreiner-, Tischler- und Glaserarbeiten 2c.
9. „ Die Schlosser-, Flaschner- und Hafnerarbeiten 2c.

B. Maschinenzeichnen:

10. Heft: Die wichtigsten Maschinenelemente.
11. „ Die wichtigsten Kraftmaschinen.
12. „ Die wichtigsten Arbeitsmaschinen.

Jedes Heft bildet ein für sich bestehendes Ganzes und wird einzeln abgegeben.

Delabar, Gangolf,

Anleitung zum Linearzeichnen mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und technischen Zeichnens, als Lehrmittel für Lehrer und Schü ler an den verschiedenen gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium
Bd.: 2,2

Freiburg im Breisgau 1867